MATEMATIKPROV, LÅNG LÄROKURS 26.3.2019
BESKRIVNING AV GODA SVAR

Examensämnets censorsmöte har godkänt följande beskrivningar av goda svar.

Av en god prestation framgår det hur examinanden har kommit fram till svaret. I lösningen måste det ingå nödvändiga uträkningar eller andra tillräckliga motiveringar och ett slutresultat. I bedömningen fästs uppmärksamhet vid helheten och vid de tre stegen start, mellansteg och slutresultat. Räknefel som inte väsentligt ändrar uppgiftens natur ger ingen betydande sänkning av antalet poäng. Räknefel och fel i den matematiska modellen som ändrar uppgiftens natur kan däremot sänka antalet poäng avsevärt.

I provet är räknaren ett hjälpmedel, och dess roll bedöms separat för varje uppgift. Om symbolräknare använts i en uppgift ska det framgå av prestationen. I lösningar av uppgifter som kräver analys räcker det inte enbart med ett svar som erhållits med hjälp av räknaren utan övriga motiveringar. Däremot räcker ett svar som examinanden fått med räknaren i allmänhet i rutinberäkningar. Detsamma gäller rutinmässiga delar av mera omfattande uppgifter. Exempel på sådana är omskrivning av uttryck, ekvationslösning samt derivering och integrering av funktioner.

Del A

1.	C, D, E, G, F, B	

2.	Enligt räknereglerna för skalär produkt uppfylls villkoren då $a + b = 2$ och $a - b = 3$.	6
	Genom att addera ekvationerna ledvis får vi $a = \frac{5}{2}$.	4
	Därmed är $b = 2 - a = -\frac{1}{2}$, dvs. $\overline{c} = \frac{5}{2}\overline{i} - \frac{1}{2}\overline{j}$.	2

3.	Med hjälp av räknereglerna för logaritm får vi $\ln(2x + 1) - \ln(2x) = \ln \frac{2x+1}{2x}$	3
	$= \ln(1 + \frac{1}{2x})$,	1
	$\ln(x + 1) - \ln(x) = \ln \frac{x+1}{x} = \ln(1 + \frac{1}{x})$.	2
	Eftersom logaritmfunktionen är växande	2
	och $\frac{1}{2x} < \frac{1}{x}$, så ger det senare uttrycket större värden.	4

4.	$a = 1$	1
	$b = -2$	1
	$c = 4$	2
	$d = 2$	2
	Grafen har en lodrät asymptot vid punkten $x = -1$: då är nämnaren noll, ur vilket vi får d.	2
	Då $x = 0$, är funktionens värde $\frac{c}{d}$, ur vilket vi får c.	2
	Ur informationen $f(6) = 2$ och $f(-2) = -6$ får vi ett ekvationspar ur vilket vi löser a och b.	2

Del B1

5.

Nollställena för den nedåtvända parabeln är $x = 0$ och $x = 10$,	1
och dess topp ligger i punkten $(5, 2)$.	1
Parabelns ekvation är i formen $y = ax(10 - x)$,	2
och med hjälp av toppen får vi $2 = 25a$,	
dvs. $a = \frac{2}{25}$.	1
Den andra parabeln är spegelbilden av den första, dvs. $y = -\frac{2}{25}x(10 - x)$.	1
Vi beräknar arean med hjälp av en integral: $\int_0^{10} ax(10 - x) - (-ax(10 - x))\,dx$	4
$(= 2a[5x^2 - \frac{1}{3}x^3]_0^{10})$	1
$= \frac{1000a}{3} = \frac{80}{3} \approx 27$ (kvadratmeter).	1

6.

Rutsystemets sidlängd är 40 cm och area 1600 cm^2.	1
De vita rutornas area är hälften av detta, dvs. 800 cm^2.	1
Hela brädets area är 2500 cm^2.	1
Sannolikheten för att ett riskorn fälls i en vit ruta är direkt proportionell mot den tidigare nämnda arean, dvs. $p = \frac{8}{25}$,	1
(upprepade försök ger en binomialfördelning)	1
och den efterfrågade sannolikheten är $\sum_{k=15}^{30} \binom{30}{k} \left(\frac{8}{25}\right)^k \left(\frac{17}{25}\right)^{30-k}$	5
$= 0{,}03049\ldots \approx 0{,}0305$.	2

7.

Grafen $y = \lvert ax^2 + bx + c \rvert$ är antingen en parabel, eller en sådan parabel vars mittersta del är speglad med avseende på x-axeln.	3
Vi väljer den parabel vars topp ligger i punkten $(0, -4)$, vilket betyder att den speglade toppen ligger i punkten $(0, 4)$ och ger en lösning.	3
• Till exempel $a = 1$, $b = 0$ och $c = -4$ fungerar.	3
• De två enda övriga lösningarna till ekvationen $\lvert x^2 - 4 \rvert = 4$	1
är $x = \pm 2\sqrt{2}$.	2

8.

(Att ett tals sista siffra är en nolla är ekvivalent med att talet är delbart med tio.)	1
$(10!)^{1\,000\,000} - (9!)^{1\,000\,000} = (10^{1\,000\,000} - 1)(9!)^{1\,000\,000}$	3
$10^{1\,000\,000} - 1$ är inte delbart med tio.	2
9! är delbart med tio men inte med hundra.	2
$\Rightarrow$ Talet $(9!)^{1\,000\,000}$ och därmed också det ursprungliga talet slutar på en miljon nollor.	4

9.

Vi betecknar $x_k = 20k$, $k = 0, \ldots, 10$	
Enligt trapetsregeln får vi uppskattningen $\sum_{k=0}^{9} \frac{1}{2}(x_{k+1} - x_k)(f(x_{k+1}) + f(x_k))$	1
$= 10 \sum_{k=0}^{9}(f(x_{k+1}) + f(x_k))$	2
$= 3030\ (\frac{\text{km s}}{\text{h}})$	
$= 0{,}84166\ldots \approx 0{,}84$ (km).	3
Enligt Simpsons regel får vi uppskattningen $\frac{200}{30}\big(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + 4f(x_5) + 2f(x_6) + 4f(x_7) + 2f(x_8) + 4f(x_9) + f(x_{10})\big)$	3
$= \frac{20 \cdot 457}{3}\ (\frac{\text{km s}}{\text{h}})$	1
$= 0{,}8462\ldots \approx 0{,}85$ (km).	2

Del B2

10.

Formeln för summan av en geometrisk serie gäller då $\lvert x\rvert < 1$.	2
I slutledningen tillämpas formeln i situationen $x = 2$, vilket betyder att den inte är giltig.	1
Endast svarat att slutledningen är fel eftersom summan av positiva tal inte kan vara negativ.	1
Vi betecknar $y = \tan(x)$.	1
Med stöd av formeln för summan av en geometrisk serie bör vi lösa $\frac{1}{1-y} = \frac{3}{2}$	2
$\Rightarrow y = \frac{1}{3}$.	2
I det följande löser vi ekvationen $\tan(x) = \frac{1}{3}$	2
$\Rightarrow x = \tan^{-1}(\frac{1}{3}) = 0{,}321750\ldots \approx 0{,}322$.	2

11.

Vi beräknar derivatan av funktionen g: $g'(x) = \sin(x)^{\cos(x)}\left(\ln(\sin(x))(-\sin(x)) + \frac{\cos^2(x)}{\sin(x)}\right)$.	1
I det ifrågavarande intervallet är $\sin(x)^{\cos(x)} > 0$, $\ln(\sin(x)) < 0$ och $\sin(x) > 0$, vilket betyder att $g' > 0$	3
$\Rightarrow g$ är (strängt) växande.	1
På motsvarande sätt ser vi att f är avtagande.	2
Ekvationen $f(x) = g(x)$ har därmed högst en lösning.	2
• Med stöd av symmetri ser vi att $x = \frac{\pi}{4}$ löser ekvationen	2
och är därmed ekvationens enda lösning.	1

12.

Då en triangelns bas och area (dvs. i praktiken höjden) är givna, så är dess omkrets den minsta möjliga då de två övriga sidorna är sinsemellan lika långa, dvs. då triangeln är likbent.	1
En mera detaljerad argumentation. Vi minimerar $f(x) = \sqrt{x^2+h^2} + \sqrt{(a-x)^2+h^2}$. Derivatan: $f'(x) = x/\sqrt{x^2+h^2} - (a-x)/\sqrt{(a-x)^2+h^2}$. Derivatans nollställe $x = \frac{a}{2}$ och funktionens profil är -|+.	2
Från detta följer att om trianglens bas och omkrets är givna, så är dess area den största möjliga då triangeln är likbent. (Observation 1)	2
I uppgiften skall vi visa att triangeln med given omkrets och maximal area är liksidig.	1
Låt A vara triangeln som har maximal area för en given omkrets. Vi betecknar längderna av triangeln A:s sidor med bokstäverna a, b och c.	
Vi tillämpar Observation 1 på triangeln A där sidan a är bas. Eftersom triangeln A:s area är den största möjliga kan vi anta att de två övriga sidorna är lika långa, dvs. $b = c$.	2
Genom att i det följande fixera sidan b som bas följer utifrån observation 1 att de två övriga sidorna är lika långa ($a = c$).	3
Därmed är alla sidor lika långa, vilket betyder att triangeln är liksidig.	1
ELLER (Efter observation 1)	
Anta att triangelns omkrets är $3p$. Om a är triangelns kortaste sida och $b = c$, så kan vi skriva $a = p - x$, $b = c = p + x/2$, då $0 \leqslant x \leqslant p$.	1
Triangelns area är $A(x) = \frac{1}{2}a\sqrt{b^2 - a^2/4} = \frac{1}{4}(p-x)\sqrt{3p^2+6px}$.	2
Vi beräknar derivatan $A'(x)$	1
och löser ekvationen $A'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.	1
Eftersom $A(p) = 0$, är arean den största möjliga då $x = 0$,	1
vilket betyder att arean är störst då triangeln är liksidig.	1

13.	Påståendet är ekvivalent med olikheten $a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \geqslant 0$. Vi kompletterar kvadraten: $(a_1 - a_2)^2 \geqslant 0$, dvs. olikheten är sann.	1 2
	Vi upphöjer ledvis olikheterna i fjärde potens, multiplicerar med talet n^2 och betecknar $b_k = a_k^2$, varefter vi får olikheten $(\sum_{k=1}^{n} b_k)^2 \leqslant n \sum_{k=1}^{n} b_k^2$.	3
	Olikhetens vänstra led består av kvadraterna b_k^2 och av blandtermerna $2b_ib_j$.	2
	Genom att ledvis subtrahera n stycken kvadrattermer kommer vi fram till olikheten $\sum_{i<j} 2b_ib_j \leqslant (n-1) \sum_{k=1}^{n} b_k^2$.	2
	Genom att förena $2b_ib_j$ samt b_i^2 och b_j^2 får vi den ekvivalenta olikheten $0 \leqslant \sum_{i<j} (b_i - b_j)^2$, dvs. den ursprungliga olikheten är sann.	2