YLIOPPILASTUTKINTOLAUTAKUNTA
STUDENTEXAMENSNÄMNDEN

MATEMATIIKAN KOE, LYHYT OPPIMÄÄRÄ 26.3.2019
HYVÄN VASTAUKSEN PIIRTEITÄ

Tutkintoaineen sensorikokous on hyväksynyt seuraavat hyvän vastauksen piirteet.

Hyvästä suorituksesta näkyy, miten vastaukseen on päädytty. Ratkaisussa on oltava tarvittavat laskut tai muut riittävät perustelut sekä lopputulos. Arvioinnissa kiinnitetään huomiota kokonaisuuteen, ja ratkaisu pyritään arvioimaan kolmiosaisesti: alku, välivaiheet ja lopputulos. Laskuvirheet, jotka eivät olennaisesti muuta tehtävän luonnetta, eivät alenna pistemäärää merkittävästi. Sen sijaan tehtävän luonnetta muuttavat lasku- ja mallinnusvirheet saattavat alentaa pistemäärää huomattavasti.

Laskin on kokeen apuväline, jonka rooli arvioidaan tehtäväkohtaisesti. Jos ratkaisussa on käytetty symbolista laskintaa, sen on käytävä ilmi suorituksesta. Analysointia vaativien tehtävien ratkaisemisessa pelkkä laskimella saatu vastaus ei riitä ilman muita perusteluja. Sen sijaan laskimesta saatu tulos yleensä riittää rutiinitehtävissä ja laajempien tehtävien rutiiniosissa. Tällaisia ovat esimerkiksi lausekkeiden muokkaaminen, yhtälöiden ratkaiseminen sekä funktioiden derivointi ja integrointi.

A-osa

1.

C, D, E, G, F, B	

2.

Tehtävä arvostellaan YTL:ssä, opettajan ei tarvitse tehdä siihen merkintöjä. Oikeakin vastaus saattaa näkyä kokelaille nollana ennen kuin arvostelu on suoritettu.	
$x = 0$ $y = 1$	2 2
$(y = (x-1)^2 - 1)$ $x = 1$ $y = -1$	 2 2
$x = 5$ $y = 7$	2 2
Kysytyn luvun vastaluku	1/kohta

3.

Jaetaan punainen alue kahtia lipun lävistäjän avulla. Sinisen, keltaisen ja ylemmän punaisen kolmion korkeus on 150 ja kanta 100, eli kunkin pinta-ala 7 500. Vihreän, valkoisen ja alemman punaisen kolmion korkeus on 300 ja kanta 50, eli pinta-ala 7 500. Koko lipun pinta-ala on $300 \cdot 150 = 45\,000$. Punaisen suhteellinen osuus on siten $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, ≈ 33 % ja neljän muun värin osuus on $\frac{1}{6}$ ≈ 17 %.	1 3 3 1 1 1 1 1

4.

Tulos: 1, 2, 3, 4, 5, 6 Frekvenssi: 5, 2, 5, 8, 8, 2	 2
Moodi eli tyyppiarvo on 4 ja 5, sillä nämä ovat useimmin esiintyvät tulokset.	2
Mediaani on 4, sillä suuruusjärjestyksessä keskimmäiset (eli viidestoista ja kuudestoista) nopat saivat arvon 4.	3
Keskiarvo on $\frac{108}{30} = 3{,}6$. Arvo saadaan jakamalla noppien silmälukujen summa noppien lukumäärällä.	3
$\frac{2}{30} = \frac{1}{15}$	2

B1-osa

5.

Koska yksi litra vastaa yhtä kuutiodesimetriä, niin tölkissä on 1 750 kuutiosenttimetriä maitoa. Särmiön tilavuus on $(9{,}25)^2 \cdot 20 = 1711{,}25$. Pyramidin tilavuus on $\frac{1}{3}(9{,}25)^2(23-20) = 85{,}5625$. Tölkin tilavuus on siten noin 1 797 kuutiosenttimetriä, joten ilmaa on täydessä maitotölkissä 47 kuutiosenttimetriä.	2 2 4 2 2

6.	Korkeuden funktio $h(t) = 600 + 45t$ (cm)	2
	Säteen funktio $r(t) = 4 + 0{,}3t$ (cm)	3
	Tilavuuden funktio $V(t) = \frac{\pi}{3}h(t)r(t)^2 = \pi(200 + 15t)(4 + 0{,}3t)^2$	4
	Tilavuus 20 vuoden kuluttua $V(20) = 157079{,}6327\ldots \approx 157\,000$ (cm^3)	3

7.	Lasketaan eri valuuttojen arvot euroissa eri vaihtohjen jälkeen.	1
	Ensimmäisen vaihdon jälkeen zloteja on 285 e ja korunoita 190 e	3
	Puolen osuuden jälkeen jäljellä on $285/3 = 95$ euron arvosta zloteja, jotka vaihdon jälkeen ovat 90,25 euron arvosta korunoita.	3
	Yhteensä korunoita on siis 280,25 euron arvosta.	2
	Tsekin osuuden jälkeen jäljellä on $280{,}25/5 = 56{,}05$ euron arvosta zloteja.	2
	Vaihtotappion jälkeen Mikolle jää noin $56{,}05 \cdot 0{,}95 = 53{,}25$ euroa.	1
	TAI	
	Tehtävässä osa rahoista vaihdetaan kolme kertaa, osa kaksi kertaa.	2
	Euroista zlotyjen ja korunien kautta takaisin euroiksi tulee vaihdettua $300 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} =$ 20 euroa,	2
	eli kolmen vaihdon seurauksena Mikko saa takaisin $20 \cdot (0{,}95)^3 = 17{,}15$ euroa.	2
	Euroista korunien kautta takaisin euroiksi tulee vaihdettua $200 \cdot \frac{1}{5} = 40$ euroa,	2
	eli kahden vaihdon seurauksena hän saa takaisin $40 \cdot (0{,}95)^2 = 36{,}10$ euroa.	2
	Yhteensä hän saa takaisin noin 53,25 euroa.	2
	Vastaukseksi kelpaa myös 53 euroa.	

8.	Tarkastellaan funktiota $f(x) = -x^3 + 1000x^2 + 100x + 2019$	
	ja derivaattaa $f'(x) = -3x^2 + 2000x + 100$.	1
	Derivaatta on positiivinen, kun $x \leqslant \frac{1000}{3} + \frac{10}{3}\sqrt{10003} \approx 666{,}7$.	5
	Siten jono $(a_1, \ldots, a_{666})$ on kasvava ja jono $(a_{667}, \ldots, a_{1000})$ on vähenevä.	2
	Lasketaan arvot a_{666} ja a_{667}:	1
	$a_{666} = 148\,216\,323$ ja $a_{667} = 148\,216\,756$.	2
	Valinta $k = 667$ toteuttaa tehtävän ehdon.	1

9.1.	Sinifunktio saa arvoja välillä -1 ja 1.	1
	Kun $B > 0$, niin funktion suurin arvo on $A + B$ ja pienin arvo on $A - B$.	2
	Saadaan yhtälöpari $A + B = 192$ ja $A - B = 0$	2
	$\Rightarrow A = B = \frac{192}{2} = 96$ (cm).	1
	Sinifunktion $\sin(x)$ pienin arvo saavutetaan esimerkiksi kohdassa $x = -\frac{\pi}{2}$.	2
	Saadaan yhtälö $-\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{12{,}4}(9 - t_0)$	3
	$\Rightarrow t_0 = 12{,}1$.	1

9.2.	Todennäköisyys, että yksi heinäkuu ei ole ennätyslämmin, on $\frac{59}{60}$.	1
	Koska tapahtumat ovat riippumattomia, niin todennäköisyys saadaan tulokaavalla $(\frac{59}{60})^{30} = 0{,}6039\ldots \approx 60\,\%$.	3
	(Toistokoetta kuvaa binomijakauma)	1
	ja komplementtitapahtuman todennäköisyys on $(\frac{59}{60})^{30} + \binom{30}{1}(\frac{59}{60})^{29}(\frac{1}{60})^1$	5
	$= 0{,}91108\ldots$	1
	Kysytyn tapahtuman todennäköisyys on $1 - 0{,}91108\ldots = 0{,}08891 \approx 8{,}9\,\%$.	1

B2-osa

10.

Vauvan painon malli on $m(x) = ax^3$. Alkuarvoilla 0,52 (m) ja 4 (kg) saadaan $a(0{,}52)^3 = 4$, joten $a \approx 28{,}45$. Kaavalla lasketaan $m(0{,}55) \approx 4{,}7$; $m(0{,}60) \approx 6{,}1$; $m(0{,}65) \approx 7{,}8$; $m(0{,}70) \approx 9{,}8$ (kg).	 2 2
Pisteet on merkitty oikein kuvaajaan.	4
Kaavalla arvioitu paino 1,75-metriselle henkilölle on 152 kg, joka on enemmän kuin keskivertoihmiseltä odottaisi. Kaava perustuu siihen, että aikuinen ihminen olisi vain skaalattu versio vauvasta, mutta ihmisen kehon mittasuhteet muuttuvat hänen kasvaessaan.	2 2

11.

Arvion mukaan Harrin kuukausipalkka olisi $155 \cdot 27 = 4185$ eli $\frac{15}{4200} = 0{,}3571\ldots\% \approx 0{,}36\%$ vähemmän kuin mitä hän todellisuudessa saa.	2 4
Harri laskee ensin, mikä olisi tuntipalkka, jos työtunteja olisi 160. Hän arvioi $\frac{4200}{160} = \frac{4000}{160} + \frac{200}{160} = 25 + 1, \ldots$, joka on oikein. Seuraavaksi hän ottaa huomioon, että tämä tulos pitäisi kertoa luvulla $\frac{160}{155}$, jotta saisi oikean tuntipalkan, ja käyttää arviota $\frac{160}{155} \approx \frac{27}{26}$, joka on varsin hyvä, sillä $\frac{27}{26} = \frac{162}{156}$. Harrin järkeily perustuu siis päteviin arvioihin.	1 4 1 1 1
Päättelyn pätevyyttä perustellaan ensimmäisen kohdan vastauksella.	+0

12.

Tehtävän voi ratkaista selvittämällä, kuinka paljon korkoa maksetaan, kun korkokattoa ei ole, ja kuinka paljon maksetaan, kun on. Oheisesta taulukosta (linkit alla) ilmenee, että ilman korkokattoa laina-aikana maksetaan 15833,75 euroa korkoa. Lainakustannus korkokaton kanssa saadaan korvaamalla taulukossa lukua 4,5 suuremmat luvut luvulla 4,5. Oheisesta taulukosta (linkit alla) ilmenee, että lainasta, jossa on korkokatto, maksetaan laina-aikana 15065 euroa korkoa. Korkokatto säästää siis koroissa noin 800 euroa, joka on vähemmän kuin sen kustannukset (5 700 euroa), joten korkokaton ottaminen ei tässä tapauksessa kannattanut. https://www.ylioppilastutkinto.fi/images/sivuston_tiedostot/Hyv_vast_piirt/FI_2019_K/n_t12_v1.ods https://www.ylioppilastutkinto.fi/images/sivuston_tiedostot/Hyv_vast_piirt/FI_2019_K/n_t12_v2.ods	 7 2 1 2

13.

Funktio $f(x) = -x^2$ toteuttaa vaaditut ehdot, sillä sen ainoa maksimikohta on $x = 0$, joka on avoimella välillä.	4 2
Funktio $f(x) = (x - \frac{1}{2})^2$ toteuttaa vaaditut ehdot, sillä välillä $-1 \leqslant x \leqslant 2$ sen maksimiarvo on $\frac{9}{4}$, joka saavutetaan, kun $x = -1$ ja $x = 2$.	4 2