YLIOPPILASTUTKINTOLAUTAKUNTA
STUDENTEXAMENSNÄMNDEN

MATEMATIIKAN KOE, PITKÄ OPPIMÄÄRÄ 26.3.2019
HYVÄN VASTAUKSEN PIIRTEITÄ

Tutkintoaineen sensorikokous on hyväksynyt seuraavat hyvän vastauksen piirteet.

Hyvästä suorituksesta näkyy, miten vastaukseen on päädytty. Ratkaisussa on oltava tarvittavat laskut tai muut riittävät perustelut sekä lopputulos. Arvioinnissa kiinnitetään huomiota kokonaisuuteen, ja ratkaisu pyritään arvioimaan kolmiosaisesti: alku, välivaiheet ja lopputulos. Laskuvirheet, jotka eivät olennaisesti muuta tehtävän luonnetta, eivät alenna pistemäärää merkittävästi. Sen sijaan tehtävän luonnetta muuttavat lasku- ja mallinnusvirheet saattavat alentaa pistemäärää huomattavasti.

Laskin on kokeen apuväline, jonka rooli arvioidaan tehtäväkohtaisesti. Jos ratkaisussa on käytetty symbolista laskintaa, sen on käytävä ilmi suorituksesta. Analysointia vaativien tehtävien ratkaisemisessa pelkkä laskimella saatu vastaus ei riitä ilman muita perusteluja. Sen sijaan laskimesta saatu tulos yleensä riittää rutiinitehtävissä ja laajempien tehtävien rutiiniosissa. Tällaisia ovat esimerkiksi lausekkeiden muokkaaminen, yhtälöiden ratkaiseminen sekä funktioiden derivointi ja integrointi.

A-osa

1.	C, D, E, G, F, B	

2.	Pistetulon laskusääntöjen mukaan ehdot toteutuvat, kun $a+b=2$ ja $a-b=3$.	6
	Laskemalla yhtälöt puolittain yhteen saadaan $a=\frac{5}{2}$.	4
	Siten $b=2-a=-\frac{1}{2}$, eli $\overline{c}=\frac{5}{2}\overline{i}-\frac{1}{2}\overline{j}$.	2

3.	Logaritmin laskusääntöjen avulla saadaan	
	$\ln(2x+1)-\ln(2x)=\ln\frac{2x+1}{2x}$	3
	$=\ln(1+\frac{1}{2x})$,	1
	$\ln(x+1)-\ln(x)=\ln\frac{x+1}{x}=\ln(1+\frac{1}{x})$.	2
	Koska logaritmifunktio on kasvava	2
	ja $\frac{1}{2x}<\frac{1}{x}$, niin jälkimmäinen lauseke on suurempi.	4

4.	$a=1$	1
	$b=-2$	1
	$c=4$	2
	$d=2$	2
	Kuvaajalla on pystysuora asymptootti kohdassa $x=-1$: tällöin nimittäjä on nolla, josta saadaan d.	2
	Kun $x=0$, funktion arvo on $\frac{c}{d}$, josta saadaan c.	2
	Tiedoista $f(6)=2$ ja $f(-2)=-6$ saadaan yhtälöpari, josta ratkaistaan a ja b.	2

B1-osa

5.	Alaspäin aukeavan paraabelin nollakohdat ovat $x = 0$ ja $x = 10$	1
	ja sen huippu on pisteessä $(5, 2)$.	1
	Paraabeli on muotoa $y = ax(10 - x)$,	2
	jolloin huipun avulla saadaan $2 = 25a$,	
	eli $a = \frac{2}{25}$.	1
	Toinen paraabeli on ensimmäisen peilikuva, eli $y = -\frac{2}{25}x(10 - x)$.	1
	Lasketaan pinta-ala integraalin avulla: $\int_0^{10} ax(10 - x) - (-ax(10 - x))\,dx$	4
	$(= 2a[5x^2 - \frac{1}{3}x^3]_0^{10})$	1
	$= \frac{1000a}{3} = \frac{80}{3} \approx 27$ (neliömetriä).	1

6.	Ruudukon sivun pituus on 40 cm ja sen pinta-ala on 1600 cm^2	1
	ja valkoisten ruutujen pinta-ala on puolet tästä, eli 800 cm^2.	1
	Koko laudan pinta-ala on 2500 cm^2.	1
	Todennäköisyys, että riisinjyvä putoaa valkoiseen ruutuun, on suoraan verrannollinen em. pinta-alaan, eli $p = \frac{8}{25}$,	1
	(toistokokeesta muodostuu binomijakauma)	1
	ja kysytty todennäköisyys on $\displaystyle\sum_{k=15}^{30} \binom{30}{k} \left(\frac{8}{25}\right)^k \left(\frac{17}{25}\right)^{30-k}$	5
	$= 0{,}03049\ldots \approx 0{,}0305$.	2

7.	Kuvaaja $y = \lvert ax^2 + bx + c\rvert$ on joko paraabeli, tai paraabeli, jonka keskiosa on peilattu x-akselin suhteen.	3
	Valitsemme paraabelin, jonka huippu on pisteessä $(0, -4)$, jolloin peilattu huippu on pisteessä $(0, 4)$ ja tuottaa yhden ratkaisun.	3
	• Esimerkiksi $a = 1$, $b = 0$ ja $c = -4$ käy.	3
	• Yhtälön $\lvert x^2 - 4\rvert = 4$	1
	ainoat kaksi muuta ratkaisua ovat $x = \pm 2\sqrt{2}$.	2

8.	(Luvun päättyminen nollaan on yhtäpitävää sen kanssa, että se on jaollinen kymmenellä)	1
	$(10!)^{1\,000\,000} - (9!)^{1\,000\,000} = (10^{1\,000\,000} - 1)(9!)^{1\,000\,000}$	3
	$10^{1\,000\,000} - 1$ ei ole jaollinen kymmenellä.	2
	9! on jaollinen kymmenellä muttei sadalla	2
	$\Rightarrow$ luku $(9!)^{1\,000\,000}$, ja siten alkuperäinenkin luku, päättyy miljoonaan nollaan.	4

9.	Merkitään $x_k = 20k$, $k = 0, \ldots, 10$	
	Puolisuunnikassäännön mukaan saadaan arvio $\sum_{k=0}^{9} \frac{1}{2}(x_{k+1} - x_k)(f(x_{k+1}) + f(x_k))$	1
	$= 10 \sum_{k=0}^{9}(f(x_{k+1}) + f(x_k))$	2
	$= 3030$ $(\frac{\text{km s}}{\text{h}})$	
	$= 0{,}84166\ldots \approx 0{,}84$ (km).	3
	Simpsonin säännön mukaan saadaan arvio $\frac{200}{30}\big(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + 4f(x_5) + 2f(x_6) + 4f(x_7) + 2f(x_8) + 4f(x_9) + f(x_{10})\big)$	3
	$= \frac{20 \cdot 457}{3}$ $(\frac{\text{km s}}{\text{h}})$	1
	$= 0{,}8462\ldots \approx 0{,}85$ (km).	2

B2-osa

10.

Geometrisen sarjan summan kaava pätee kun $\lvert x\rvert < 1$.	2
Päättelyssä sitä sovelletaan tilanteessa $x = 2$, jolloin se siis ei päde.	1
Vastattu (vain), että johtopäätös on väärä, sillä positiivisten lukujen summa ei voi olla negatiivinen.	1
Merkitään $y = \tan(x)$.	1
Geometrisen sarjan summan kaavan perusteella pitää ratkaista $\frac{1}{1-y} = \frac{3}{2}$	2
$\Rightarrow y = \frac{1}{3}$.	2
Seuraavaksi ratkaistaan yhtälö $\tan(x) = \frac{1}{3}$	2
$\Rightarrow x = \tan^{-1}(\frac{1}{3}) = 0{,}321750\ldots \approx 0{,}322$.	2

11.

Lasketaan funktion g derivaatta: $g'(x) = \sin(x)^{\cos(x)}\left(\ln(\sin(x))(-\sin(x)) + \frac{\cos^2(x)}{\sin(x)}\right)$	1
Tarkasteluvälillä $\sin(x)^{\cos(x)} > 0$, $\ln(\sin(x)) < 0$ ja $\sin(x) > 0$, joten $g' > 0$	3
$\Rightarrow g$ on (aidosti) kasvava.	1
Vastaavasti nähdään, että f on vähenevä.	2
Yhtälöllä $f(x) = g(x)$ on siten korkeintaan yksi ratkaisu.	2
• Symmetrian nojalla nähdään, että $x = \frac{\pi}{4}$ ratkaisee yhtälön	2
ja se on siten yhtälön ainoa ratkaisu,	1

12.

Tiedetään, että kun kolmion kanta ja pinta-ala (eli käytännössä korkeus) on annettu, niin sen piiri on pienimmillään, kun kaksi muuta sivua ovat keskenään yhtä pitkiä, eli kolmio on tasakylkinen.	1
Tarkempi perustelu. Minimoidaan $f(x) = \sqrt{x^2 + h^2} + \sqrt{(a-x)^2 + h^2}$. Derivaatta: $f'(x) = x/\sqrt{x^2 + h^2} - (a-x)/\sqrt{(a-x)^2 + h^2}$. Derivaatan nollakohta $x = \frac{a}{2}$ ja funktion profiili -|+.	2
Tästä seuraa, että jos kolmion kanta ja piiri on annettu, on sen pinta-ala suurin kun kolmio on tasakylkinen. (Havainto 1)	2
Tehtävässä tavoitteena on osoittaa, että pinta-alaltaan suurin kolmio annetulla piirillä on tasasivuinen.	1
Olkoon A se kolmio, jonka pinta-ala on annetulla piirillä suurin mahdollinen. Merkitään muuttujilla a, b ja c kolmion A sivujen pituuksia. Sovelletaan ratkaisun Havaintoa 1 kolmioon A, kun sivua a ajatellaan kantana. Koska kolmion pinta-ala on suurin mahdollinen, päätellään tasakylkisyyden perusteella, että $b = c$.	3
Kiinnittämällä seuraavaksi sivu b kannaksi, seuraa Havainnosta 1, että myös kaksi muutakin sivua ovat yhtä pitkiä ($a = c$).	2
Siten kaikki sivut ovat yhtä pitkiä, joten kolmio A on tasasivuinen.	1
TAI (Havainnon 1 jälkeen)	
Olkoon kolmion piiri muotoa $3p$. Jos a on kolmion lyhyin sivu ja $b = c$, niin voidaan kirjoittaa $a = p - x$, $b = c = p + x/2$, kun $0 \leqslant x \leqslant p$.	1
Kolmion pinta-ala on $A(x) = \frac{1}{2}a\sqrt{b^2 - a^2/4} = \frac{1}{4}(p-x)\sqrt{3p^2 + 6px}$.	2
Lasketaan derivaatta $A'(x)$	1
ja ratkaistaan yhtälö $A'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.	1
Koska $A(p) = 0$, niin pinta-alan maksimi saavutetaan arvolla $x = 0$,	1
joten suurin pinta-ala saavutetaan tasasivuisella kolmiolla.	1

13.	Väite on yhtäpitävä epäyhtälön $a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \geqslant 0$ kanssa. Täydennetään neliö: $(a_1 - a_2)^2 \geqslant 0$, eli epäyhtälö pätee.	1 2
	Korotetaan epäyhtälö puolittain potenssiin 4, kerrotaan luvulla n^2 ja merkitään $b_k = a_k^2$, jolloin päädytään epäyhtälöön $(\sum_{k=1}^{n} b_k)^2 \leqslant n \sum_{k=1}^{n} b_k^2$. Vasen puoli koostuu neliöistä b_k^2 sekä sekatermeistä $2b_ib_j$. Vähentämällä puolittain neliöt b_k^2 päädytään epäyhtälöön $\sum_{i<j} 2b_ib_j \leqslant (n-1) \sum_{k=1}^{n} b_k^2$. Yhdistämällä $2b_ib_j$ sekä b_i^2 ja b_j^2 saadaan yhtäpitävä epäyhtälö $0 \leqslant \sum_{i<j} (b_i - b_j)^2$, joten alkuperäinen epäyhtälö pätee.	3 2 2 2