MATEMATIKPROV, LÅNG LÄROKURS 26.3.2018
BESKRIVNING AV GODA SVAR

De beskrivningar av svarens innehåll och poängsättningar som ges här är inte bindande för studentexamensnämndens bedömning. Censorerna beslutar om de kriterier som används i den slutgiltiga bedömningen.

Av en god prestation framgår det hur examinanden har kommit fram till svaret. I lösningen måste det ingå nödvändiga uträkningar eller andra tillräckliga motiveringar och ett slutresultat. I bedömningen fästs uppmärksamhet vid helheten och vid de tre stegen start, mellansteg och slutresultat. Räknefel som inte väsentligt ändrar uppgiftens natur ger ingen betydande sänkning av antalet poäng. Räknefel och fel i den matematiska modellen som ändrar uppgiftens natur kan däremot sänka antalet poäng avsevärt.

I provet är räknaren ett hjälpmedel, och dess roll bedöms separat för varje uppgift. Om symbolräknare använts i en uppgift ska det framgå av prestationen. I lösningar av uppgifter som kräver analys räcker det inte enbart med ett svar som erhållits med hjälp av räknaren utan övriga motiveringar. Däremot räcker ett svar som examinanden fått med räknaren i allmänhet i rutinberäkningar. Detsamma gäller rutinmässiga delar av mera omfattande uppgifter. Exempel på sådana är omskrivning av uttryck, ekvationslösning samt derivering och integrering av funktioner.

Del A

1.

$f(-2) = (-2)^3 - (-2)$	1
$\quad = -8 + 2 = -6$	1
$f'(x) = 3x^2 - 1$	1
$\Rightarrow f'(3) = 3^3 - 1 = 26$	1
$\int_0^4 f(x)\,dx = \Big/_0^4 \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2$	1
$\quad = \frac{1}{4}4^4 - \frac{1}{2}4^2 = 4^3 - 8 = 56$	1

2.

$2(x-6)(x-9) = 2x^2 - 2\cdot 6x - 2\cdot 9x + 2\cdot 6\cdot 9$	1
$\quad = 2x^2 - 30x + 108$	1
$x^2 + x - 12 = 0 \Rightarrow x = 3$ eller $x = -4$	1
$\Rightarrow (x-3)(x+4)$	1
$p(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ för något värde på a. Genom att avlägsna parenteserna:	
$p(x) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2$.	1
Samtidigt är $p(x) = ax^2 + bx + c$, och genom att jämföra konstanttermerna får vi	
$ax_1x_2 = c$, dvs. $x_1x_2 = \frac{c}{a}$.	1

3.

$f'(x) = \cos x - \sqrt{3}\sin x$	1
$f'(x) = 0 \Rightarrow \cos x = \sqrt{3}\sin x$	1
$\Rightarrow \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$	1
$\Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \pi n$, av vilka $\frac{\pi}{6}$ och $\frac{7\pi}{6}$ tillhör intervallet.	1
$f(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2} + \sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2} = 2$ och $f(\frac{7\pi}{6}) = -\frac{1}{2} - \sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2} = -2$	1
Eftersom $f(0) = \sqrt{3}$ och $f(2\pi) = \sqrt{3}$, betyder det att extremvärdena är ± 2.	1
ELLER	
$f(x) = (\bar{i} + \sqrt{3}\,\bar{j}) \cdot (\sin x\,\bar{i} + \cos x\,\bar{j})$	1
$(\bar{i} + \sqrt{3}\,\bar{j}) = 2(\frac{1}{2}\,\bar{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\bar{j})$	1
$\quad = 2(\sin\frac{\pi}{6}\,\bar{i} + \cos\frac{\pi}{6}\bar{j})$	1
$\Rightarrow f(x) = 2(\sin x \sin\frac{\pi}{6} + \cos x \cos\frac{\pi}{6})$	1
$\quad = 2\cos(x + \frac{\pi}{6})$	1
$\Rightarrow$ extremvärdena är ± 2.	1

4.

Funktionen är styckvis kontinuerlig.	1
Värdet är 2 i intervallet $[0{,}1[$, annars 0.	1
Värdet är x i intervallet $[0{,}1[$, annars 0.	2
Funktionen är styckvis kontinuerlig.	1
Värdet är 1 i intervallet $[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}[$, annars 0.	1

Del B1

5.

$(x-2)^2+(y-1)^2=4$	1
$x=1 \Rightarrow (y-1)^2=4-1=3$	1
$\Rightarrow y=1\pm\sqrt{3}$	1
Punkten $(-2,4)$ är den punkt på linjen som är närmast cirkeln, eftersom linjens normal i denna punkt går genom punkten $(2,1)$.	1
Avståndet från linjen till medelpunkten är $\lvert(2,1)-(-2,4)\rvert=\sqrt{4^2+3^2}=5$.	1
Avståndet från linjen till cirkeln är därmed $5-2=3$.	1

6.

Förhållandet bevaras när vi förändrar skalan, och vi antar därför att hypotenusans längd är 2 (typtriangel).	1
Längden på den ena delen av den närliggande kateten till den spetsiga vinkeln är då $\frac{1}{\cos 30^\circ}=\frac{2}{\sqrt{3}}$.	1
Hela katetens längd är $2\cos 30^\circ=\sqrt{3}$.	1
Längden på katetens andra del är därmed $\sqrt{3}-\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
$=\sqrt{3}(1-\frac{2}{3})=\frac{1}{\sqrt{3}}$.	1
Det efterfrågade förhållandet är alltså $\frac{2}{\sqrt{3}}/\frac{1}{\sqrt{3}}=2$.	1
Svar $\frac{1}{2}$	-0

7.

Rättad 28.3.2018	
Av sju riktiga vinstnummer kan man välja sex på sju olika sätt; av två tilläggsnummer kan man välja ett på två sätt och av ett tilläggsnummer kan man välja ett på ett sätt.	1
Antalet möjliga 6+1-rader är $7\cdot 2$ före regeländringen och 7 efter regeländringen.	1
Det totala antalet rader är $\binom{39}{7}$ och $\binom{40}{7}$.	1+1
Sannolikheterna är alltså $\frac{14}{\binom{39}{7}}=\frac{14}{15380937}=9{,}10218\ldots\cdot 10^{-7}$ före regeländringen och $\frac{7}{\binom{40}{7}}=\frac{7}{18643560}=3{,}75464\ldots\cdot 10^{-7}$ efter regeländringen.	1+1

8.

$156=2^2\cdot 3\cdot 13$	1
Talens faktorer och därmed möjliga åldrar är 1, 2, 3, 4, 6, 12, 13, 26, 39, 52, 78 och 156.	1
Eftersom det är fråga om yngre syskon är endast 1, 2, 3, 4, 6, 12 och 13 möjliga.	1
Faktorn 13 förekommer en gång, vilket betyder att ett av syskonen är 13 år.	1
Produkten av de två övriga syskonens åldrar är 12.	1
$\Rightarrow$ Möjliga åldrar 1–12, 2–6, 3–4.	1

9.

$g(x)=f'(x)=x^4-4x+1$	1
Vi ska beräkna $g(x)=0$, och bestämmer därför $g'(x)=4x^3-4$.	1
Iterationsformeln	1
Iteration med startvärdet 0,5 (0,2321428571, 0,2509614668, 0,2509921574) $\Rightarrow$ 0,25099.	1
Iteration med startvärdet 1,5 (1,493421053, 1,493358562, 1,493358557) $\Rightarrow$ 1,4934.	1
Eftersom f är en kontinuerligt deriverbar funktion finns extremvärdena i det öppna intervallet i derivatans nollställen: $f(0{,}25099)=0{,}125197\ldots\approx 0{,}1252$ och $f(1{,}4934)=-1{,}48145\ldots\approx -1{,}481$.	1

Del B2

10.	Annika har använt formeln $a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y$. Fareed har använt formeln $a \cdot b = \lvert a\rvert\,\lvert b\rvert\,\cos(a,b)$.	1 1
	En figur ur vilken det framgår att vinkeln mellan vektorerna u och v och x-axeln är $\frac{\pi}{5}$ och $\frac{8\pi}{15}$ och att deras längder är 7 och 3. Den spetsiga vinkeln mellan vektorerna u och v har betecknats med storleken $\frac{\pi}{3}$.	1 1
	På den första raden har Annika placerat vektorernas komponenter och tagit talen 7 och 3 som gemensamma faktorer. På den andra raden har hon använt formeln $a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y$. På den tredje raden har hon använt formeln $\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$. På den fjärde raden har hon beräknat argumentet för cosinus och sedan beräknat värdet för cosinus.	1 1
11.	Vi väljer först ett polynom med nollställena -1, 0, 1 och 2, dvs. till exempel $x(x+1)(x-1)(x-2)$. När $\lvert x\rvert$ är stort är detta positivt, alltså är grafen till polynomet W-formad. När vi multiplicerar med -1 får vi ett polynom som är positivt exakt i de efterfrågade intervallen. Vi adderar 2 till polynomet och får $f(x) = 2 - x(x+1)(x-1)(x-2)$. (Också andra exempel är möjliga.)	1 1 1
	Vi kan till exempel söka efter en icke-negativ funktion med ett maximum och ett minimum. Derivatan av funktionen $g(x) = x^2e^x$ är $g'(x) = (x^2+2x)e^x$, vars nollställen är $x = 0$ och $x = -2$. Ett annat alternativ är att söka efter ett polynom med ett minimum och en terrasspunkt. Derivatan kunde vara till exempel $12x(x-1)^2$, då vi får $g(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$ genom att integrera.	3
12.	Rättad 28.3.2018	
	Funktionen är inte avtagande i hela definitionsmängden: till exempel är $g(\frac{1}{2}) = \log_{1/2} x = \frac{\ln x}{\ln(1/2)} = -\frac{\ln x}{\ln 2} = -g(2) < g(2)$, för att $g(2) > 0$. (Funktionen är avtagande i intervallen $(0,1)$ och $(1,\infty)$, men inte definierat i $a = 1$.)	3
	ELLER	
	Vi visar påstående i fallet $a > 1$ Anta att $1 < a < b$. Vi måste visa att $g(a) > g(b)$. $g(a) > g(b) \Leftrightarrow \log_a x > \log_b x \Leftrightarrow f_a^{-1}(x) > f_b^{-1}(x)$ Vi betecknar $x = f_a(y)$, substituerar in detta i föregående olikhet och tillämpar den växande funktionen f_b på båda leden: $f_a^{-1}(x) > f_b^{-1}(x) \Leftrightarrow f_b(y) > f_a(y) \Leftrightarrow b^y > a^y$. Eftersom $y > 1$ och $b > a$ är den sista olikheten sann.	 1 1 1
	ELLER	
	med derivatan	
	Anta att $x < y$. Nu är $H(y) - H(x) = \int_x^y h(t)\,dt$. Om $h \geqslant 0$ följer det att $H(y) - H(x) \geqslant 0$, dvs. H är växande. Om $h < 0$ i något intervall $[c,d]$ är $H(d) - H(c) = \int_c^d h(t)\,dt < 0$, dvs. H är inte växande.	1 1 1

13.	f är deriverbar i alla punkter $x \neq 0$.	1
	Vi får vänsterderivatan i punkten $x = 0$ normalt: $D\ln(1-x) = \frac{1}{x-1} \to -1$ då $x \to 0-$.	1
	Högerderivatan beräknas med differenskvoten $\frac{p(x)\cos\frac{1}{x} - f(0)}{x} = \frac{p(x)}{x}\cos\frac{1}{x}$.	1
	Om $p(0) \neq 0$, $\frac{p(x)}{x} \to \pm\infty$, existerar inget gränsvärde och därmed ingen högerderivata.	1
	Om $p(0) = 0$, dvs. $c = 0$, så $\frac{p(x)}{x} = ax \to 0$ då $x \to 0$.	1
	Eftersom $ax\cos\frac{1}{x} \to 0$, existerar högerderivatan och dess värde är 0. Eftersom värdet av vänsterderivatan är -1 är funktionen dock inte deriverbar. Det existerar alltså inga koefficienter som uppfyller kravet.	1