MATEMATIIKAN KOE, PITKÄ OPPIMÄÄRÄ 1.10.2018
HYVÄN VASTAUKSEN PIIRTEITÄ

Alla oleva vastausten piirteiden, sisältöjen ja pisteitysten luonnehdinta ei sido ylioppilastutkintolautakunnan arvostelua. Lopullisessa arvostelussa käytettävistä kriteereistä päättää tutkintoaineen sensorikunta.

Hyvästä suorituksesta näkyy, miten vastaukseen on päädytty. Ratkaisussa on oltava tarvittavat laskut tai muut riittävät perustelut sekä lopputulos. Arvioinnissa kiinnitetään huomiota kokonaisuuteen, ja ratkaisu pyritään arvioimaan kolmiosaisesti: alku, välivaiheet ja lopputulos. Laskuvirheet, jotka eivät olennaisesti muuta tehtävän luonnetta, eivät alenna pistemäärää merkittävästi. Sen sijaan tehtävän luonnetta muuttavat lasku- ja mallinnusvirheet saattavat alentaa pistemäärää huomattavasti.

Laskin on kokeen apuväline, jonka rooli arvioidaan tehtäväkohtaisesti. Jos ratkaisussa on käytetty symbolista laskintaa, sen on käytävä ilmi suorituksesta. Analysointia vaativien tehtävien ratkaisemisessa pelkkä laskimella saatu vastaus ei riitä ilman muita perusteluja. Sen sijaan laskimesta saatu tulos yleensä riittää rutiinitehtävissä ja laajempien tehtävien rutiiniosissa. Tällaisia ovat esimerkiksi lausekkeiden muokkaaminen, yhtälöiden ratkaiseminen sekä funktioiden derivointi ja integrointi.

A-osa

1.

$x^2 \leqslant 4 \Leftrightarrow \lvert x \rvert \leqslant 2$	1
$\Leftrightarrow x \leqslant 2$	1
ja $x \geqslant -2$	1
$x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ tai $x = 3$ ratkaisukaavalla	1
ylöspäin aukeva paraabeli $\Rightarrow$ 1. epäyhtälö toteutuu, kun $1 \leqslant x \leqslant 3$	1
Yhdistämällä a-kohtaan saadaan $1 \leqslant x \leqslant 2$	1

2.

Lavennetaan x:llä: $\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{x}{x+1}$	1
$\Rightarrow$ lauseke saadaan muotoon $\frac{1+x}{x+1}$	1
$= 1$	1
$(\sqrt{2})^6 = 2^3 = 8$	1
$(\sqrt[3]{3})^6 = 9 > 8 \Rightarrow \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$	1
$(\sqrt{2})^{10} = 2^5 = 32$ ja $(\sqrt[5]{5})^{10} = 5^2 = 25 < 32$	
$\Rightarrow \sqrt[5]{5} < \sqrt{2}$	1

3.

$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{3+x} = \Big/_{-1}^{1} \ln(3+x)$	1
$= \ln 4 - \ln 2$	1
$\ln(4/2) = \ln 2$	1
$\int_{-1}^{1} e^{2\lvert x \rvert}\, dx = \int_{-1}^{0} e^{-2x}\, dx + \int_{0}^{1} e^{2x}\, dx$	1
$= -\frac{1}{2}\Big/_{-1}^{0} e^{-2x} + \frac{1}{2}\Big/_{0}^{1} e^{2x}$	1
$= e^2 - 1$	1

4.

$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi,\ n \in \mathbf{Z}$	1
Välillä $[0,2\pi]$ vain ratkaisu $x = \frac{\pi}{2}$	1
$f'(t) = -\sin t$	1
Välillä $[0,2\pi]$ nollakohdat $t = 0$, $t = \pi$ tai $t = 2\pi$	1
$\sin z = 1 - \cos^2 z = \sin^2 z \Leftrightarrow \sin z\,(1 - \sin z) = 0 \Leftrightarrow \sin z = 0$ tai $\sin z = 1$	1
Edellisten kohtien perusteella $z = 0$ tai $z = \frac{\pi}{2}$, $z = \pi$ tai $z = 2\pi$	1

B1-osa

5.

$\overline{u}+2\,\overline{v}=-\,\overline{i}+2\,\overline{j}-11\,\overline{k}$	1
Yksi kerroin väärin, kaksi oikein	1
$\overline{u}\cdot\overline{v}=-1+0-21=-22$	2
pieni laskuvirhe	-1
$\cos\varphi=\frac{\overline{u}\cdot\overline{v}}{\Vert\overline{u}\Vert\,\Vert\overline{v}\Vert}=\frac{-22}{\sqrt{14}\sqrt{50}}$	1
$\Rightarrow \varphi=146{,}255\ldots^\circ\approx146^\circ$	1

6.

Sivuamispisteessä yhtälöparilla $y=kx$, $(x-5)^2+(y-5)^2=1$ on täsmälleen yksi ratkaisu $(x{,}y)$	
Saadaan yhtälö $(x-5)^2+(kx-5)^2=1 \Leftrightarrow (1+k^2)x^2-10(k+1)x+49=0$	1
Diskriminanttiehto $D=100(k+1)^2-4\cdot49(1+k^2)=0$	1
$\Leftrightarrow 12k^2-25k+12=0$, josta ratkaisut $k=\frac{3}{4}$ tai $k=\frac{4}{3}$	1
Suurempi kulmakerroin on $k=\frac{4}{3}$, josta saadaan yhtälö $\frac{25}{9}x^2-\frac{70}{3}x+49=0$	1
$\Rightarrow x=\frac{21}{5}$ ja $y=\frac{4}{3}x=\frac{28}{5}$	2

7.

Ehto $y(30)=\frac{1}{2}y(0)\Leftrightarrow y_0e^{-30k}=\frac{1}{2}y_0$	1
josta $k=\frac{\ln 2}{30}$ [yksikkönä 1/vuosi]	1
Kysytään aikaa t_1, jolle $y(t_1)=\frac{1}{10}y(0)\Leftrightarrow e^{-kt_1}=\frac{1}{10}$	1
Ratkaisuksi saadaan $t_1=\frac{\ln 10}{\ln 2}\cdot 30\approx 99{,}6578$ vuotta, joten kysytty vuosi on 1986 + 100 = 2086	1
Koska $y'(t)=-ky_0e^{-kt}$	1
niin $y'(40)=-\frac{\ln 2}{30}e^{-40k}y_0=-\frac{\ln 2}{30}2^{-4/3}y_0\approx-0{,}0092\ y_0/\text{vuosi}$	1

8.

Kuusikulmion sivun pituus on sama kuin ympyrän säde = 1, joten sen piiri on $6\cdot1=6$	1
Suhteellinen virhe on $\frac{6-2\pi}{2\pi}\approx-0{,}045$	1
6-kulmioon liittyvän (tasasivuisen) kolmion origosta mitattu korkeus h toteuttaa $h^2+(\frac{1}{2})^2=1$,	1
joten $h=\frac{\sqrt{3}}{2}$.	
12-kulmion sivun pituudelle s pätee $(\frac{1}{2})^2+(1-h)^2=s^2$,	1
joten $s=\sqrt{2-\sqrt{3}}$ ja piiriksi saadaan $12s=12\sqrt{2-\sqrt{3}}$	1
Vastaava suhteellinen virhe on noin $-0{,}011$	1

9.

Kun $k=1$, niin $\lim_{t\to0+}w(t{,}1)=\lim_{t\to0+}e^{-t}=1$	1
Kun $0<k<1$, niin $\lim_{t\to0+}w(t{,}k)=\lim_{t\to0+}kt^{k-1}e^{-t^k}=\infty$	1
Kun $k>1$, niin $\lim_{t\to0+}w(t{,}k)=\lim_{t\to0+}kt^{k-1}e^{-t^k}=0$	1
$W(x{,}k)=\int_0^x kt^{k-1}e^{-t^k}\,dt=-\Big/_0^x e^{-t^k}$	2
$=1-e^{-x^k}$, $x\geqslant0$	1

B2-osa

10.

Lukujen 3 ja 5 suurin yhteinen tekijä on 1, joten kaikki kokonaisluvut n voidaan esittää muodossa $n = 5x + 3y$ sopivilla $x,y \in \mathbf{Z}$. Vastaus on siis: Voidaan.	1
Tai: Keksitty esitys $4 = 8 \cdot 3 - 4 \cdot 5$, josta vastaus	1
Lukujen 6 ja 10 syt on 2, joten niiden avulla voidaan muodostaa vain parillisia lukuja. Vastaus: Ei voida.	1
$\text{syt}(2k,k+1) = \text{syt}(2k-(k+1),k+1) = \text{syt}(k-1,k+1) = \text{syt}(k+1,2)$. Jos k on pariton, niin $\text{syt}(k+1,2) = 2$, eikä paritonta lukua $k+2$ voida muodostaa.	2
Jos $k = 2n$ on parillinen, niin $\text{syt}(k+1,2) = 1$, joten $k+2$ voidaan muodostaa. Vastaus: Kaikki parilliset positiiviset kokonaisluvut k.	2
Tai: Jos $k = 2n$, niin $k+2 = 2(n+1)$ on parillinen ja se voidaan muodostaa kaavan $k+2 = (n+1)(2(k+1)-2k)$ nojalla.	1

11.		
	Ympyrän kaarta vastaavalle kehäkulmalle α ja keskuskulmalle β pätee $\beta = 2\alpha$.	1
	Kyseessä on kolmion kulmien puolittajien leikkauspiste. Kun piirretään ympyrän sisälle mahdollisimman suuri ympyrä, niin sen keskipiste on kulmien puolittajien leikkauspisteessä.	1
	TAI	
	Kyseessä on kolmion kulmien puolittajien leikkauspiste, eli kolmion kaikkien kulmien puolittajat leikkaavat tässä yhdessä pisteessä.	1
	TAI	
	Kyseessä on kolmion kulmien puolittajien leikkauspiste. Tämä piste keskipisteenä voidaan piirtää ympyrä, joka sivuaa kolmion kaikkia sivuja.	1
	a-kohdan perustelu: Kyseessä olevassa tilanteessa kolmion BMC kulmien summa on $180°$.	1
	Tämän kolmion kulman M suuruus on $180° - \beta$.	1
	Toisaalta kyseessa on tasakylkinen kolmio (kulmasta M alkavien sivujen pituus on ympyrän säde), joten myös kulman B suuruus on α.	1
	Näin ollen $(180° - \beta) + \alpha + \alpha = 180°$, josta seuraa $\beta = 2\alpha$.	1
	b-kohdan perustelu (ensimmäinen vaihtoehto): Asetetaan kolmion yhteen kulmaan pieni ympyrä, joka sivuaa molempia kulman kylkiä. Annetaan ympyrän säteen kasvaa (sivuaminen säilyttäen) niin, että ympyrä kohtaa kolmion kolmannen kyljen. Yhdenmuotoisten kolmioiden avulla on nyt helppo osoittaa, että kolmion kaikki kulmien puolittajat leikkaavat toisensa tämän ympyrän keskipisteessä.	4
	TAI	
	b-kohdan perustelu (toinen vaihtoehto): Todistetaan, että kolmion kulmien puolittajat leikkaavat toisensa samassa pisteessä. Olkoot kolmion kulmat A, B ja C. Leikatkoon kulmien A ja B puolittajat pisteessä P. Osoitetaan, että myös kulman C puolittaja leikkaa tässä pisteessä muut puolittajat.	1
	Piirretään pisteestä P kohtisuorat kulmien A, B ja C vastaisille sivuille. Olkoot näiden leikkauspisteet A', B' ja C'.	1
	Kolmiot APC' ja APB' ovat yhteneviä (kks, yhteinen hypotenuusa). Samoin kolmiot BPC' ja BPA' ovat yhteneviä. Täten etäisyys kahden kulmanpuolittajan leikkauspisteestä kullekin sivulle on sama.	1
	Piirretään jana PC. Nyt kolmiot CPA' ja CPB' ovat yhteneviä (suorakulmaiset kolmiot, joilla on yhteinen hypotenuusa ja yhtä pitkät kateetit). Täten CP puolittaa kulman C.	1
	TAI	
	b-kohdan perustelu (kolmas vaihtoehto): Olkoon kulmanpuolittajien leikkauspiste P. Piirretään pisteestä P kohtisuora kaikille kolmion sivuille.	1
	Pareittain yhtenevien kolmioiden perusteella (yhteiset hypotenuusat, yhtäsuuret kulmat) kaikki etäisyydet pisteestä sivuille ovat samoja.	1
	Ympyrä siis kulkee näiden pisteiden (kohtisuorien ja sivujen leikkauspisteet) kautta.	1
	Kyseinen etäisyys on pienin mahdollinen, joten ympyrä sivuaa kolmiota täsmälleen näissä pisteissä.	1

12.	Yhtenäisten merkkien laskemisessa kannattaa käyttää jotakin systematiikkaa, jotta lasku menee mahdollisimman kivuttomasti ja oikein. Esimerkiksi seuraava tapa on mahdollinen. Tarkastellaan merkkejä joissa keskiledi ei pala. Merkki on yhtenäinen, jos reunalle muodostuu "mato". Yhtenäisiä ovat tapaukset missä koko reuna on päällä (nollamerkki) ja pois (tyhjä merkki), jota ei lasketa.	1
	Muussa tapauksessa mato alkaa jossakin kuudesta pisteestä ja sen pituus on välillä 1–5, eli yhteensä 30 tapausta.	1
	Jäljellä on tapaukset, jossa keskimmäinen led-valo palaa. Näitä tapauksia on $2^6 = 64$ kappaletta.	1
	Niistä epäyhtenäisiä ovat tapaukset, jossa kolme yläledi-valoa ovat pois-päällä-pois, tai vastaavasti kolme alaledi-valoa, tai kummatkin. Yhteensä näitä tapauksia on $2^3 - 1 + 2^3 - 1 + 1 = 15$, eli yhtenäisiä merkkejä on $64 - 15 = 49$.	1
	Kaikkiaan yhtenäisiä merkkejä on siis 80 kappaletta.	
	Erilaisia merkkejä on $2^7 = 128$ kpl,	1
	joten kysytty todennäköisyys on $\frac{81}{128}$ (sillä nyt lasketaan myös tyhjä merkki).	1

13.	Olkoon $g(x) = x^2 - a - \ln x$, kun $x > 0$. Koska $g'(x) = 2x - \frac{1}{x} = 0$ vain yhdessä pisteessä $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, niin yhtälön ratkaisuja voi olla korkeintaan 2 (merkkikaavio)	1
	Ratkaisu x_0 on yksikäsitteinen $\Leftrightarrow g(x_0) = g'(x_0) = 0$, josta seuraa $a = \frac{1}{2}(1 + \ln 2)$	1
	Merkitään $h(x) = f(x) - a - \ln x$, kun $x > 0$. Koska $f(x)$ on kasvava, niin $f'(x) \geqslant 0$, ja koska $f''(x) > 0$ kaikilla $x > 0$, on oltava $f'(x) > 0$ kaikilla $x > 0$. Tällöin $h'(x) = f'(x) - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow xf'(x) = 1$.	1
	Jos tällä yhtälöllä on kaksi eri ratkaisua x_1,$x_2 > 0$, niin (Rollen lauseen perusteella) niiden välissä on funktion $p(x) = xf'(x)$ derivaatan nollakohta c $\Rightarrow p'(c) = f'(c) + cf''(c) = 0 \Rightarrow f''(c) = -\frac{f'(c)}{c} < 0$, joka on ristiriita.	1
	Koska $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$ ja $\frac{1}{x}$ on vähenevä, niin yhtälöllä $xf'(x) = 1$ on ratkaisu $x_0 > 0$, joka on edellisen perusteella yksikäsitteinen.	1
	Tehtävän ehto toteutuu ainoastaan silloin, kun $h(x_0) = 0$, josta seuraa $a = f(x_0) - \ln x_0$.	1