MATEMATIIKAN KOE, LYHYT OPPIMÄÄRÄ 26.3.2018
HYVÄN VASTAUKSEN PIIRTEITÄ

Alla oleva vastausten piirteiden, sisältöjen ja pisteitysten luonnehdinta ei sido ylioppilastutkintolautakunnan arvostelua. Lopullisessa arvostelussa käytettävistä kriteereistä päättää tutkintoaineen sensorikunta.

Hyvästä suorituksesta näkyy, miten vastaukseen on päädytty. Ratkaisussa on oltava tarvittavat laskut tai muut riittävät perustelut sekä lopputulos. Arvioinnissa kiinnitetään huomiota kokonaisuuteen, ja ratkaisu pyritään arvioimaan kolmiosaisesti: alku, välivaiheet ja lopputulos. Laskuvirheet, jotka eivät olennaisesti muuta tehtävän luonnetta, eivät alenna pistemäärää merkittävästi. Sen sijaan tehtävän luonnetta muuttavat lasku- ja mallinnusvirheet saattavat alentaa pistemäärää huomattavasti.

Laskin on kokeen apuväline, jonka rooli arvioidaan tehtäväkohtaisesti. Jos ratkaisussa on käytetty symbolista laskintaa, sen on käytävä ilmi suorituksesta. Analysointia vaativien tehtävien ratkaisemisessa pelkkä laskimella saatu vastaus ei riitä ilman muita perusteluja. Sen sijaan laskimesta saatu tulos yleensä riittää rutiinitehtävissä ja laajempien tehtävien rutiiniosissa. Tällaisia ovat esimerkiksi lausekkeiden muokkaaminen, yhtälöiden ratkaiseminen sekä funktioiden derivointi ja integrointi.

A-osa

1.

Laskettu neliöjuuri ($x = 8$). Laskettu neliöjuuri ($x = -8$).	1 1
$64 = 2^6$ $y = 6$	1 1
$64 = 4 \cdot 4 \cdot 4$ $z = 4$	1 1

2.

$1{,}1 \cdot 1{,}1 = 1{,}21 > 1{,}2$ $\Rightarrow$ Tapa 1 johtaa korkeampaan hintaan.	1 1
$0{,}9 \cdot 1{,}1 = 1{,}1 \cdot 0{,}9$ $\Rightarrow$ Hinta on kummassakin tapauksessa sama.	1 1
$1{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}96$ ja $1{,}3 \cdot 0{,}7 = 0{,}91$ $\Rightarrow$ Tapa 1 johtaa korkeampaan hintaan.	1 1
Pelkkä vastaus	0

3.

B, A, C H, E, D	1/kohta

4.

Korjattu 28.3.2018	
Jakoviiva koostuu kolmesta janasta, joista vaakasuora jana on kuitenkin niin lyhyt, että riittävä tarkkuus voidaan saavuttaa myös kahdella janalla. Kumpikin ratkaisuvaihtoehto hyväksytään.	
Jakoviiva yhdistää kahden joen suut.	1
Jakoviiva koostuu kahdesta tai kolmesta janasta.	1
Jakoviivan muodostavat janat puolittavat kulmat jokien suiden kohdalla.	1
Järven pinta-ala on $3 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3$.	1
Kylän B osuus koostuu neliöstä, jonka pinta-ala on $3 \cdot 3$ km^2 sekä kolmiosta, jonka kanta on 1 km ja korkeus noin 2 km (kahden janan tapaus).	1
$\Rightarrow$ B:n vesialue on noin 10 ja A:n 5 (km^2).	1

B1-osa

5.	Määritetään lukujen 405 ja 316 suhde.	1
	$\Rightarrow 28{,}16 \approx 28\ \%$	1
	$405 = k\,(2016 - 1958) + 316$	1
	$\Rightarrow k = 1{,}53448\ldots \approx 1{,}53$	1
	$1{,}53448 \cdot (2020 - 1958) + 316$	1
	$= 411{,}13\ldots \approx 411$ (ppm)	1

6.	$f'(x) = 4x - 2$	1
	$\Rightarrow$ nollakohta $x = \frac{1}{2}$	1
	$g'(x) = 0$ vastaa kohtia, joissa käyrän tangentti on vaakasuorassa.	1
	$\Rightarrow x = 0$	1
	$f'(x) < 0$ kun $x < \frac{1}{2}$ ja $g'(x) < 0$ kun $x > 0$	1
	$\Rightarrow$ Derivaattafunktiot ovat pienempiä kuin 0 muuttujan arvoilla $0 < x < \frac{1}{2}$.	1
	$<$ sijaan $\leqslant$	-0

7.	Mahdollisia kahden nopan yhdistelmiä on kaikkiaan 36.	1
	Summan kuusi voi saada seuraavilla tavoilla: $1+5$, $2+4$, $3+3$, $4+2$ ja $5+1$.	1
	Vastaavasti summan kahdeksan voi saada viidellä erilaisella kahden nopan yhdistelmällä. Todennäköisyys on siis yhteensä $\frac{10}{36} \approx 28\,\%$ TN.	1
	Samat silmäluvut voi saada kuudella tavalla ($1+1$, $2+2$, $3+3$, $4+4$, $5+5$ tai $6+6$).	1
	Yhden uudelleenheiton todennäköisyys on siten $\frac{6}{36}$ ($= \frac{1}{6}$).	1
	Tapahtumat ovat toisistaan riippumattomia $\Rightarrow$ TN $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216} \approx 0{,}46\,\%$.	1

8.	Kuukausien määrä $n = 120$, kuukausikorkokerroin $q = 1 + \frac{0{,}012}{12} = 1{,}001$	1
	Annuiteetti $= 100000 q^n \frac{q-1}{q^n - 1}$	
	$= 884{,}74919\ldots \approx 884{,}75$ (euroa/kk)	1
	Annuiteetti $A = 1100$, lainan määrä $K = 51498{,}75 - 21000 = 30498{,}75$ ja korko kuten a-kohdassa	1
	Annuiteetikaavasta ratkaistaan q^n: $1 - q^{-n} = \frac{q^n - 1}{q^n} = \frac{K}{A}(q-1)$ (tehtävän voi ratkaista myös lukuarvot sijoitettuina).	1
	$\Rightarrow q^{-n} = 0{,}97227386\ldots \Rightarrow n > 28{,}13\ldots$, eli laina on maksettu 29 kuukauden päästä.	2

9.1	$u \cdot v = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 12$	1
	$\lvert u \rvert = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$ ja $\lvert v \rvert = \sqrt{13}$	1
	$\cos\alpha = \frac{12}{13}$ joten $\alpha = 22{,}61\ldots \approx 23$ (astetta)	1
	u ja w ovat kohtisuorassa kun $u \cdot w = 0$	1
	$u \cdot w = 3 \cdot 2 + 2 \cdot t$	1
	$u \cdot w = 0$ kun $t = -3$	1

9.2	Todennäköisyys saada n ykköstä ja $20 - n$ muuta silmälukua on $\binom{20}{n}(\frac{1}{6})^n(\frac{5}{6})^{20-n}$	3
	Vastatapahtuman todennäköisyys on näiden summa kun n saa arvot nollasta neljään	1
	Vastatapahtuman todennäköisyys on siten $0{,}7687\ldots$	1
	joten kysytty todennäköisyys on $0{,}2312\ldots \approx 23{,}1\ \%$	1

B2-osa

10.

Auton arvo alenee joka vuosi saman prosenttiosuuden verran TAI auton arvo vähenee eksponentiaalisen mallin mukaisesti.	2
Taulukon perusteella näyttää siltä, että $a_{n+1} = 0{,}8\,a_n$ $\Rightarrow a_n = 40000 \cdot (0{,}8)^n$.	1 1
$40000 \cdot (0{,}8)^n < 2000$ $\Rightarrow n > 13{,}42\ldots$, eli 14 vuoden jälkeen	1 1

11.

Tehtävän tekstissä esiintyvä kirjain φ ei vastaa kuvassa olevaa φ-kirjainta vaan sen käänteislukua. Kumpaakin kutsutaan kultaiseksi suhteeksi ja kumpikin hyväksytään ratkaisuksi. YTL pahoittelee tästä mahdollisesti aiheutunutta sekaannusta.	
(Kuvan mukainen ratkaisu) Pidemmän osan pituus φ Lyhyemmän osan pituus $1-\varphi$ Koko janan pituuden suhde pidemmän osan pituuteen $\frac{1}{\varphi}$ Pidemmän osan pituuden suhde lyhyemmän osan pituuteen $\frac{\varphi}{1-\varphi}$ $\Rightarrow \frac{1}{\varphi} = \frac{\varphi}{1-\varphi}$ $\Rightarrow \varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0{,}61803\ldots \approx 0{,}618$, sillä negatiivinen ratkaisu ei kelpaa.	 1 1 1 1 1 1
TAI	
(Tekstin mukainen ratkaisu) Merkitään pidemmän osan pituuutta muuttujalla x Lyhyemmän osan pituus $1-x$ Koko janan pituuden suhde pidemmän osan pituuteen $\frac{1}{x}$ Pidemmän osan pituuden suhde lyhyemmän osan pituuteen $\frac{x}{1-x}$ $\Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$ $\Rightarrow x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, sillä negatiivinen ratkaisu ei kelpaa. Kysytty luku (koko janan pituuden suhde pidemmän osan pituuteen) on $\varphi = \frac{1}{x}$ $= \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1{,}61803\ldots \approx 1{,}618$.	 1 1 1 1 1 1

12.

Frekvenssien summa on havaintojen määrä eli huhtikuun päivien lukumäärä (30). Taulukossa näkyvien lukujen summa on 28. $\Rightarrow$ Puuttuva luku on $30 - 28 = 2$. Merkitään puuttuvaa autojen lukumäärää muuttujalla x. Havaintojen keskiarvo saadaan kaavasta $\frac{0\cdot2+1\cdot5+2\cdot7+3\cdot6+5\cdot5+7\cdot3+x\cdot2}{30}$ $= \frac{83+2x}{30} = 3{,}3 \Rightarrow x = 8$.	1 1 1 2 1
Pelkkä vastaus 8	0

13.	Katkaisemattoman kartion sivujana s ratkaistaan Pythagoraan lauseella, jolloin $s = \sqrt{30^2 + 15^2}$.	1
	Katkaistu osa on yhdenmuotoisuuden nojalla kolmasosa tästä, eli jäljelle jää $S = \frac{2}{3}15\sqrt{5} = 22{,}36\ldots \approx 22{,}4$ (cm).	1
	Kuvassa hahmotellun alueen reuna koostuu kahden samankeskisen ympyrän kaaren osista ja niitä yhdistävistä janoista.	1
	Keskuskulma on välillä 120–180 astetta (oikea arvo noin 161 astetta) ja suuremman ympyrän säde 2–4 kertaa pienemmän ympyrän säde (oikea arvo 3-kertainen).	1
	Katkaisemattoman kartion pinta-ala on $\pi rs = \pi 225\sqrt{5}$.	1
	Katkaistu osa on yhdenmuotoisuuden nojalla $(\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}$ tästä, eli jäljelle jää $\frac{8}{9}\pi 225\sqrt{5} = 1404{,}96\ldots \approx 1405$ (cm^2).	1