MATEMATIKPROV, LÅNG LÄROKURS 1.10.2018
BESKRIVNING AV GODA SVAR

De beskrivningar av svarens innehåll och poängsättningar som ges här är inte bindande för studentexamensnämndens bedömning. Censorerna beslutar om de kriterier som används i den slutgiltiga bedömningen.

Av en god prestation framgår det hur examinanden har kommit fram till svaret. I lösningen måste det ingå nödvändiga uträkningar eller andra tillräckliga motiveringar och ett slutresultat. I bedömningen fästs uppmärksamhet vid helheten och vid de tre stegen start, mellansteg och slutresultat. Räknefel som inte väsentligt ändrar uppgiftens natur ger ingen betydande sänkning av antalet poäng. Räknefel och fel i den matematiska modellen som ändrar uppgiftens natur kan däremot sänka antalet poäng avsevärt.

I provet är räknaren ett hjälpmedel, och dess roll bedöms separat för varje uppgift. Om symbolräknare använts i en uppgift ska det framgå av prestationen. I lösningar av uppgifter som kräver analys räcker det inte enbart med ett svar som erhållits med hjälp av räknaren utan övriga motiveringar. Däremot räcker ett svar som examinanden fått med räknaren i allmänhet i rutinberäkningar. Detsamma gäller rutinmässiga delar av mera omfattande uppgifter. Exempel på sådana är omskrivning av uttryck, ekvationslösning samt derivering och integrering av funktioner.

Del A

1.

$x^2 \leqslant 4 \Leftrightarrow \lvert x\rvert \leqslant 2$	1
$\Leftrightarrow x \leqslant 2$	1
och $x \geqslant -2$	1
$x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ eller $x = 3$ med rotformeln.	1
Uppåtvänd parabel $\Rightarrow$ 1:a olikheten satisfieras då $1 \leqslant x \leqslant 3$.	1
Genom att kombinera med deluppgift a får vi $1 \leqslant x \leqslant 2$.	1

2.

Vi förlänger med x: $\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{x}{x+1}$	1
$\Rightarrow$ uttrycket får formen $\frac{1+x}{x+1}$	1
$= 1$	1
$(\sqrt{2})^6 = 2^3 = 8$	1
$(\sqrt[3]{3})^6 = 9 > 8 \Rightarrow \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$	1
$(\sqrt{2})^{10} = 2^5 = 32$ och $(\sqrt[5]{5})^{10} = 5^2 = 25 < 32$	
$\Rightarrow \sqrt[5]{5} < \sqrt{2}$	1

3.

$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{3+x} = \Big/_{-1}^{1} \ln(3+x)$	1
$= \ln 4 - \ln 2$	1
$\ln(4/2) = \ln 2$	1
$\int_{-1}^{1} e^{2\lvert x\rvert}\,dx = \int_{-1}^{0} e^{-2x}\,dx + \int_{0}^{1} e^{2x}\,dx$	1
$= -\frac{1}{2}\Big/_{-1}^{0} e^{-2x} + \frac{1}{2}\Big/_{0}^{1} e^{2x}$	1
$= e^2 - 1$	1

4.

$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi,\ n \in \mathbf{Z}$	1
I intervallet $[0,2\pi]$ finns endast lösningen $x = \frac{\pi}{2}$.	1
$f'(t) = -\sin t$	1
Nollställena i intervallet $[0,2\pi]$ är $t = 0$, $t = \pi$ eller $t = 2\pi$.	1
$\sin z = 1 - \cos^2 z = \sin^2 z \Leftrightarrow \sin z\,(1 - \sin z) = 0 \Leftrightarrow \sin z = 0$ eller $\sin z = 1$.	1
Med stöd av föregående fall är $z = 0$ eller $z = \frac{\pi}{2}$, $z = \pi$ eller $z = 2\pi$.	1

Del B1

5.

$\overline{u} + 2\,\overline{v} = -\,\overline{i} + 2\,\overline{j} - 11\,\overline{k}$	1
En koefficient fel, två korrekta.	1
$\overline{u} \cdot \overline{v} = -1 + 0 - 21 = -22$	2
Litet räknefel.	-1
$\cos\varphi = \frac{\overline{u}\cdot\overline{v}}{\lVert\overline{u}\rVert\,\lVert\overline{v}\rVert} = \frac{-22}{\sqrt{14}\sqrt{50}}$	1
$\Rightarrow \varphi = 146{,}255\ldots^\circ \approx 146^\circ$	1

6.

I tangeringspunkten har ekvationsparet $y = kx$, $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 1$ exakt en lösning (x,y).	
Vi får ekvationen $(x-5)^2 + (kx-5)^2 = 1 \Leftrightarrow (1+k^2)x^2 - 10(k+1)x + 49 = 0$.	1
Diskriminantvillkor $D = 100(k+1)^2 - 4\cdot 49(1+k^2) = 0$	1
$\Leftrightarrow 12k^2 - 25k + 12 = 0$, ur vilket vi får lösningarna $k = \frac{3}{4}$ eller $k = \frac{4}{3}$.	1
Den större riktningskoefficienten är $k = \frac{4}{3}$, som ger ekvationen $\frac{25}{9}x^2 - \frac{70}{3}x + 49 = 0$	1
$\Rightarrow x = \frac{21}{5}$ och $y = \frac{4}{3}x = \frac{28}{5}$.	2

7.

Villkoret $y(30) = \frac{1}{2}y(0) \Leftrightarrow y_0e^{-30k} = \frac{1}{2}y_0$	1
ur vilket $k = \frac{\ln 2}{30}$ [enhet 1/år].	1
Det frågas efter tiden t_1, för vilken det gäller att $y(t_1) = \frac{1}{10}y(0) \Leftrightarrow e^{-kt_1} = \frac{1}{10}$.	1
Som lösning får vi $t_1 = \frac{\ln 10}{\ln 2}\cdot 30 \approx 99{,}6578$ år, dvs. det efterfrågade året är $1986 + 100 = 2086$.	1
Eftersom $y'(t) = -ky_0e^{-kt}$	1
är $y'(40) = -\frac{\ln 2}{30}e^{-40k}y_0 = -\frac{\ln 2}{30}2^{-4/3}y_0 \approx -0{,}0092\ y_0/\text{år}$.	1

8.

Längden av sexhörningens sida är densamma som cirkelns radie $= 1$, och sexhörningens omkrets är $6\cdot 1 = 6$.	1
Det relativa felet är $\frac{6-2\pi}{2\pi} \approx -0{,}045$.	1
Då vi undersöker en av de liksidiga trianglar som sexhörningen består av, så uppfyller triangelns höjd h ekvationen $h^2 + (\frac{1}{2})^2 = 1$,	1
dvs. $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$.	
För längden av tolvhörningens sida s gäller $(\frac{1}{2})^2 + (1-h)^2 = s^2$,	1
dvs. $s = \sqrt{2-\sqrt{3}}$ och som omkrets får vi $12s = 12\sqrt{2-\sqrt{3}}$.	1
Det motsvarande relativa felet är cirka $-0{,}011$.	1

9.

Då $k = 1$ är $\lim_{t\to 0+} w(t,1) = \lim_{t\to 0+} e^{-t} = 1$.	1
Då $0 < k < 1$ är $\lim_{t\to 0+} w(t,k) = \lim_{t\to 0+} kt^{k-1}e^{-t^k} = \infty$.	1
Då $k > 1$ är $\lim_{t\to 0+} w(t,k) = \lim_{t\to 0+} kt^{k-1}e^{-t^k} = 0$.	1
$W(x,k) = \int_0^x kt^{k-1}e^{-t^k}\,dt = -\Big/_{0}^{x} e^{-t^k}$	2
$= 1 - e^{-x^k}$, $x \geqslant 0$.	1

Del B2

10.

Den största gemensamma faktorn av talen 3 och 5 är 1, dvs. alla heltal n kan framställas i formen $n = 5x + 3y$ för lämpliga $x,y \in \mathbf{Z}$. Svaret är alltså att det är möjligt.	1
Eller: En funnen framställning $4 = 8 \cdot 3 - 4 \cdot 5$, ur vilket svaret följer.	1
Den största gemensamma faktorn av talen 6 och 10 är 2, vilket betyder att vi med dessa tal endast kan framställa jämna heltal. Svar: det är inte möjligt.	1
$\text{sgf}(2k,k+1) = \text{sgf}(2k-(k+1),k+1) = \text{sgf}(k-1,k+1) = \text{sgf}(k+1,2)$. Om k är udda, så är $\text{sgf}(k+1,2) = 2$, och ett udda tal $k+2$ kan inte framställas.	2
Om $k = 2n$ är jämnt, så är $\text{sgf}(k+1,2) = 1$, dvs. $k+2$ kan framställas. Svar: Alla jämna positiva heltal k.	2
Eller: Om $k = 2n$, så är $k+2 = 2(n+1)$ jämnt och det kan bildas med stöd av formeln $k+2 = (n+1)(2(k+1)-2k)$.	1

11.	För bågvinkeln α och mittpunktsvinkeln β som svarar mot samma (cirkel)båge gäller $\beta = 2\alpha$.	1
	Det är fråga om skärningpunkten mellan bisektriserna till triangelns vinklar. Då man skriver in den största möjliga cirkeln i triangeln sammanfaller cirkelns medelpunkt med bisektrisernas skärningspunkt.	1
	ELLER	
	Det är fråga om skärningpunkten mellan bisektriserna till triangelns vinklar, alltså alla tre bisektriserna till hörnen i en triangel skär varandra i en punkt.	1
	ELLER	
	Det är fråga om skärningpunkten mellan bisektriserna till triangelns vinklar. Med denna punkt som medelpunkt kan man rita en cirkel som tangerar triangelns samtliga sidor.	1
	Motivering till deluppgift a: Vinkelsumman i triangeln BMC är 180°. Storleken på vinkeln M i denna triangel är $180° - \beta$. Det är samtidigt fråga om en likbent triangel (de sidor som utgår från hörnet M utgörs av cirkelns radie), dvs. storleken på vinkeln B är också α. Då är $(180° - \beta) + \alpha + \alpha = 180°$, ur vilket det följer att $\beta = 2\alpha$.	1 1 1 1
	Motivering till deluppgift b (första alternativet): Vi placerar in en liten cirkel i en vinkel, och cirkeln tangerar vinkelns båda ben. Vi låter cirkelns radie växa (genom att bevara tangeringen) så att cirkeln möter triangelns tredje ben. Med hjälp av likformiga trianglar är det nu lätt att visa att triangelns alla bisektriser skär varandra i medelpunkten till denna cirkel.	4
	ELLER	
	Motivering till deluppgift b (andra alternativet): Vi bevisar att alla tre bisektriser till vinklarna i en triangel skär varandra i en och samma punkt. Anta att hörnpunkterna i en triangel är A, B och C. Anta att bisektriserna till vinklarna A och B skär varandra i punkten P. Vi ska bevisa att även bisektrisen till vinkeln C skär de andra bisektriserna i denna punkt. Vi ritar normaler från punkten P till motstående sidor till vinklarna A, B och C. Vi betecknar skärningspunkterna A', B' och C'. Trianglarna APC' och APB' är kongruenta (vvs, gemensam hypotenusa). På motsvarande sätt är trianglarna BPC' och BPA' också kongruenta. Då gäller det att avstånden mellan skärningspunkterna för två bisektriser och vardera sidor i triangeln är samma. Vi ritar sträckan PC. Trianglarna CPA' och CPB' är kongruenta (rätvinkliga trianglar med en gemensam hypotenusa och lika långa kateter). Alltså halverar sträckan CP vinkeln C.	1 1 1 1
	ELLER	
	Motivering till deluppgift b (tredje alternativet): Låt bisektrisernas skärningspunkt vara P. Vi ritar normaler från punkten P till triangelns samtliga sidor. På grund av parvis kongruenta trianglar (gemensamma hypotenusor, lika stora vinklar) är alla avstånd mellan punkten P och triangelns sidor samma. Cirkeln går alltså genom de här punkterna (skärningspunkterna mellan sidorna och normalerna). Eftersom avståndet är det minsta möjliga, tangerar cirkeln triangeln exakt i dessa punkter.	1 1 1 1

12.	När man ska räkna ut hur många symboler som är sammanhängande lönar det sig att vara systematisk, så att beräkningen löper så smärtfritt och korrekt som möjligt. Till exempel följande sätt är möjligt. Vi granskar de symboler för vilka den mittersta LED-lampan inte lyser. Symbolen är sammanhängande om det uppstår en "mask" i randen. Symbolen är sammanhängande då hela randen lyser (nollsymbolen) och då den är avslagen (tom symbol) som inte räknas med.	1
	I övriga fall börjar masken i någon av de sex punkterna och dess längd är i intervallet 1–5, dvs. totalt 30 fall.	1
	Då återstår de fall där den mittersta LED-lampan lyser. De fallen är $2^6 = 64$ till antalet.	1
	Av dessa är icke-sammanhängande fall sådana där de tre övre LED-lamporna är av-på-av, eller de tre nedre LED-lamporna på motsvarande sätt, eller både och. Totalt är dessa fall $2^3 - 1 + 2^3 - 1 + 1 = 15$, dvs. de sammanhängande symbolerna är $64 - 15 = 49$ till antalet.	1
	Totalt är de sammanhängande symbolerna alltså 80 till antalet.	
	Antalet symboler är $2^7 = 128$,	1
	vilket betyder att den efterfrågade sannolikheten är $\frac{81}{128}$ (eftersom även den tomma symbolen räknas med)	1
13.	Anta att $g(x) = x^2 - a - \ln x$, då $x > 0$. Eftersom $g'(x) = 2x - \frac{1}{x} = 0$ i endast en punkt $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, kan ekvationens lösningar var högst två till antalet (teckenschema).	1
	Lösningen x_0 är entydig $\Leftrightarrow g(x_0) = g'(x_0) = 0$, ur vilket följer att $a = \frac{1}{2}(1 + \ln 2)$	1
	Vi betecknar $h(x) = f(x) - a - \ln x$, då $x > 0$. eftersom $f(x)$ är växande är $f'(x) \geqslant 0$, och eftersom $f''(x) > 0$ då $x > 0$, måste $f'(x) > 0$ för varje $x > 0$. Då är $h'(x) = f'(x) - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow xf'(x) = 1$.	1
	Om den här ekvationen har två olika lösningar x_1,$x_2 > 0$, så gäller (med stöd av Rolles sats) att mellan dessa finns ett nollställe c till derivatan av funktionen $p(x) = xf'(x)$ $\Rightarrow p'(c) = f'(c) + cf''(c) = 0 \Rightarrow f''(c) = -\frac{f'(c)}{c} < 0$, vilket är en motsägelse.	1
	Eftersom $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$ och $\frac{1}{x}$ är avtagande, har ekvationen $xf'(x) = 1$ en lösning $x_0 > 0$, som med stöd av föregående är entydigt.	1
	Uppgiftens villkor uppfylls endast då $h(x_0) = 0$, ur vilket följer $a = f(x_0) - \ln x_0$.	1