MATEMATIKPROV, LÅNG LÄROKURS 22.3.2017
BESKRIVNING AV GODA SVAR

Examensämnets censorsmöte har godkänt följande beskrivningar av goda svar.

Av en god prestation framgår det hur examinanden har kommit fram till svaret. I lösningen måste det ingå nödvändiga uträkningar eller andra tillräckliga motiveringar och ett slutresultat. I bedömningen fästs uppmärksamhet vid helheten och vid de tre stegen start, mellansteg och slutresultat. Räknefel som inte väsentligt ändrar uppgiftens natur ger ingen betydande sänkning av antalet poäng. Räknefel och fel i den matematiska modellen som ändrar uppgiftens natur kan däremot sänka antalet poäng avsevärt.

I provet är räknaren ett hjälpmedel, och dess roll bedöms separat för varje uppgift. Om symbolräknare använts i en uppgift ska det framgå av prestationen. I lösningar av uppgifter som kräver analys räcker det inte enbart med ett svar som erhållits med hjälp av räknaren utan övriga motiveringar. Däremot räcker ett svar som examinanden fått med räknaren i allmänhet i rutinberäkningar. Detsamma gäller rutinmässiga delar av mera omfattande uppgifter. Exempel på sådana är omskrivning av uttryck, ekvationslösning samt derivering och integrering av funktioner.

Del A

Poänganvisningarnas tolkning:

- Godkänd approximation: ±1 signifikanta siffror duger, om inte annat anges.
- Rad inom parenteser: poäng fås även om följande ställe/rad är rätt, dvs. för att få poäng behöver inte detta explisit ingå i lösningen.
- "•" uppmärksammar, att detta poäng är oberoende från de övriga poängen.
- "⇒" betyder, att poäng fås endast om resonemanget (föregående ställe/rad) är i skick.
- Kom även ihåg de allmänna poänganvisningarna.

1.

Insättning i rotformeln $\frac{7\pm\sqrt{7^2+4\cdot2\cdot4}}{4}$ ELLER hittat den ena roten	1
$\Rightarrow x = -\frac{1}{2}$ eller $x = 4$	1
(genom att jämföra koefficienterna) $2a = 14$ och $a^2 = b$ ELLER (genom att forma ekvationen) $x^2 + 2ax + a^2 = x^2 + 14x + b$	1
$\Rightarrow a = 7$ och $b = 49$	1
Valt några testpunkter, fått ekvationspar och löst a och b med dessa testpunktsval	max 1
Placerar (oberoende varifrån fått) $a = 7$ och $b = 49$ och förenklar	2
$4c + d = 1$ och $7c + d = 3$	1
$\Rightarrow c = \frac{2}{3}$ och $d = -\frac{5}{3}$ därmed $x = \frac{5}{2}$	1
ELLER	
Rita en linje genom punkterna $(4, 1)$ och $(7, 3)$	1
$\Rightarrow x = \frac{5}{2}$	1

2.

Man får 1 p. per korrekt svar	
D, A, B	
D, C, E	

3.

Längdens minsta värde fås i den punkt där $\overline{c}_t$ är vinkelrät mot vektorn $\overline{d} = \overline{b} - \overline{a}$ (eller i en ändpunkt)	1
$\overline{d} = \overline{i} - 2\overline{j} + 2\overline{k}$	1
$\overline{d} \cdot \overline{a} = 1 - 4 + 6 = 3$ och $\overline{d} \cdot \overline{b} = 2 + 0 + 10 = 12$	1
Då gäller $\overline{c}_t \cdot \overline{d} = 3t + 12(1 - t)$	1
Genom att lösa ut nollstället $t = \frac{4}{3}$	1
Eftersom $-2 \leqslant \frac{4}{3} \leqslant 2$ får vi nollställets minimum med det här parametervärdet och inte i en ändpunkt.	1
ELLER	
$\overline{c}_t = (t + 2(1 - t))\overline{i} + 2t\overline{j} + (3t + 5(1 - t))\overline{k}$ eller dylig form (koefficienterna samlade)	1
$= (2 - t)\overline{i} + 2t\overline{j} + (5 - 2t)\overline{k}$	
$\lvert\overline{c}_t\rvert^2 = (2 - t)^2 + (2t)^2 + (5 - 2t)^2$	1
$= 9t^2 - 24t + 29$	1
Derivatan $18t - 24$	1
Nollstället $t = \frac{4}{3}$	1
Teckenschema eller kontroll av ändpunkterna	1

4.	Alla med samma bas ($\frac{\ln y}{\ln 4} = \frac{\ln x}{\ln 2}$)	1
	• förenkling $\frac{\ln 4}{\ln 2} = 2$ eller $\frac{\ln 2}{\ln 4} = \frac{1}{2}$	1
	• bli av logaritmer mha. exponentialfunktion ($y = x^2$)	1
	förenklat svar $y = x^{\ln 4/\ln 2}$	2
	oförenklat svar $y = 4^{\log_2 x}$	1
	$\int_2^3 f(x)\,dx$, där f är a-delens funktion (även om felaktig)	1
	$= F(3) - F(2)$, där $F' = f$ (t.ex. $\Big/_2^3 \frac{1}{\ln 4/\ln 2+1} x^{\ln 4/\ln 2+1}$)	1
	Förenklat svar $\frac{19}{3}$	1
	Endast bild	0
	Svaret i a-delen är linjärt, ytan beräknad geometriskt, t.ex. mha. formel för ytan av rektangel eller triangel	1

Del B1

5.	(Då $x \leqslant 1$, är $\lvert x-1 \rvert = 1 - x$)	1
	$f(x) = 2 - x$	1
	I svaret $\pm$ (utnyttjas inte begränsningen av x, t.ex. $f(x) = 1 \pm (1-x)$)	0
	Svarat även att $f(x) = x$ då $x \geqslant 1$	-0
	(Vi får rotationskroppens volym med formeln $\pi \int_0^2 f(x)^2\,dx$ OCH substituerat i stället för f en funktion (även om felaktig))	1
	• $\int_0^1 (2-x)^2\,dx = -\Big/_0^1 \frac{1}{3}(2-x)^3 = \frac{7}{3}$	1
	• $\int_1^2 x^2\,dx = \frac{7}{3}$ ELLER symmetri	1
	$\Rightarrow$ volymen är $\frac{14\pi}{3}$	1
	π fattas	max 3
	integrerat med räknare	max 4
	integrerat endast $\int_0^1$ eller $\int_1^2$	max 2
	ELLER	
	• Volymen kan beräknas som kägelsnitt (2 st.)	1
	Radierna 2 och 1, höjden 1	1
	$\Rightarrow$ Volymen $\frac{\pi}{3}h(r_1^2 + r_1 r_2 r_2^2) = \frac{7\pi}{3}$	1
	• symmetri $\Rightarrow$ dubbelvolym	1

6.

Genom att jämföra delen som blir kvar	
Den längre kateten i triangeln A_1 har längden $s\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}s}{2}$.	1
Den triangel från vilken A_1 är avskild är likformig med den ursprungliga triangeln i skalan $\frac{\sqrt{3}}{2}$.	1
Genom iteration, när man från triangeln avskilt $A_1, \ldots, A_n$, återstår en triangel vars längre katet är $(\frac{\sqrt{3}}{2})^n s$.	1
Arean på triangeln som blir kvar är $(\frac{\sqrt{3}}{2})^{2n} s^2$ av arean på den ursprungliga triangeln.	1
Vi löser alltså ekvationen $(\frac{\sqrt{3}}{2})^{2n} = 0{,}03$	1
$\Rightarrow$ lösning 12,189 dvs. $n = 13$	1
ELLER	
Genom att räkna trianglar som avlägsnas	
$A_1 = \frac{3\sqrt{2}}{8} s^2$	1
förhållande mellan succesiva sidor på triangeln $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ELLER förhållande på areorna $\frac{3}{4}$	1
$\Rightarrow A_{k+1} = \frac{3}{4} A_k$ där $A_k = (\frac{3}{4})^{k-1} A_1$ ELLER A_k är en geometrisk följd	1
• hela arean är $\sum A_k = 4A_1$ beräknat genom summan på en geometrisk serie ELLER genom motiverat utifrån den ursprungliga triangeln	1
söker n, för vilket $\sum_{k=1}^{n} A_k \geqslant 4 \cdot 0{,}97 A_1$	1
$\Rightarrow n > 12{,}189$ dvs. $n = 13$	1
Lösningen kan även fås genom tabell, närmevärden (minst 3 decimaler) ok	
$n = 12$	-1
s fattas eller $s = 1$	-1
tabell med två decimaler	max 5

7.

Vi betecknar den inre radien med r och den inre höjden med h (mm). Ur volymvillkoret får vi $\pi r^2 h = 200000$ (mm^3).	1
Bottnens volym $\pi(r+2)^2 \cdot 5$	1
Väggens volym $\pi[(r+2)^2 - r^2]h$	1
Det uttryck som ska minimeras är $\pi(4r+4)\frac{200000}{\pi r^2} + 5\pi(r+2)^2$.	1
Derivatan $800000(-r^{-2} - 2r^{-3}) + 10\pi(r+2)$ $(= (r+2)(10\pi r^3 - 800000)r^{-3})$	1
$\Rightarrow$ minimum fås då $r = \sqrt[3]{\frac{80000}{\pi}} \approx 29{,}42$. Diametern är därmed $2(r+2) \approx 62{,}84 \approx 62{,}8$ och höjden $h + 5 \approx 78{,}55 \approx 78{,}6$.	1
Minimering med räknare	-0
Enhetsbytet ogjort, varpå resultatet är t.ex. $\ell = \text{mm}^3$ eller $\pi r^2 h = 2$	0 p.
Enhetsbytet fel $\ell = 1000$ mm^3 , $d\ell = 1000000$ mm^3	max 4

8.

• (Derivatan $12x^2 + 36x + 23$)	1
• En grafisk kontroll eller tabellering visar att det närmaste nollstället ligger i intervallet $-0{,}5$.	1
Ett lämpligt valt startvärde, t.ex. $x_0 = -0{,}5$ (alla $x_0 > -0{,}923$ är lämpliga)	1
Första iterationen i Newtons metod	1
Iterationer i Newtons metod till dess att fyra decimaler hålls lika	1
$\Rightarrow$ Svar: $x \approx -0{,}442546229 \approx -0{,}4425$	1
iteration mot nollställe nära $-2{,}430$	max 2
iteration mot nollställe nära $-1{,}627$	max 4
fel derivata	max 3

9.	Vi undersöker först det fall då minst 2 av talen p, q och r är jämna	1
	Summan av två jämna tal är jämn, vilket betyder att produkten $(p+q)(q+r)(r+p)$ är jämn.	2
	Vi undersöker sedan det fall då minst 2 av talen p, q och r är jämn.	1
	Summan av två udda tal är jämn, vilket betyder att produkten $(p+q)(q+r)(r+p)$ on parillinen.	2
	(tabell) 0, 1, 2 eller 3 jämna/udda	1 p./del
	(tabell) 0, 1, 2 och 3 jämna/udda	5
	Prövat några tal	0
	p, q, r succesiva, men undersökt ifall jämnt/udda	max 1
	Generell kommentar: Det finns många rätta lösningssätt till uppgiften	max 6

Del B2

10.	• Marias svar är korrekt ELLER det har uppmärksammats, att $4e^{2x}$ är rätt (det räcker att detta har konstaterats någonstans i svaret).	1
	• Elmer har inte beaktat derivatan av den inre funktionen.	1
	• Det rätta derivatafunktionen är $h'(x) = g'(f(x))f'(x) = 4e^x e^x = 4e^{2x}$.	1
	• Ole har beräknat potenserna felaktigt.	1
	• $(e^x)^2 = e^{2x}$, dvs. $h(x) = 2e^{2x} + 1$	1
	$\Rightarrow$ ur vilket vi med hjälp av inre funktionens derivata får $h'(x) = 4e^{2x}$	1

11.	**Deduktionslösning**	
	Eftersom antalet vitsord större än 9 är klart flera än vitsorden mindre än 9, drar vi slutsatsen att medelvärdet är större än 9.	1
	Å andra sidan, eftersom 9 är ett vanligare vitsord än 10, är medelvitsordet lägre än 9,5.	1
	Med den vikt som vitsorden 8 ger måste medelvitsordet alltså vara $9\frac{1}{4}$ alltså “9+”.	1
	ELLER	
	Lösningar där staplarna har mätts	max 3
	Procenter har använts så, att totala antalet är under 80% eller över 120%.	max 2
	Svar 9,0 ELLER 9,5	max 2
	Endast svar 9 – 9,5	1
	Fel exakthet (1/4 vitsord)	-1
	Svaret är en fördelning (om frekvenser, så tillsammans $\approx$ 1000 svar, om procenter, så tillsammans $\approx$ 100 %)	1
	Beräknat/approximerat medelvärdet på föregående fördelning, över 50 % av besvararna över medelvärdet	1
	Beräknat/approximerat medelvärdet på föregående fördelning, över 80 % av besvararna över medelvärdet	1
	Som fördelning går t.ex. (5, 10, 80, 5) eller (0,0,1,99) procent för vitsorden 7–10.	

12.	Längderna av triangelns sidor är $\sqrt{2}s$, $\sqrt{9}s$ och $\sqrt{11}s$.	1
	Arean av kvadraten N_2 är $2s^2$.	1
	Eftersom $9+2=11$, följer av Pythagoras sats att triangeln är rätvinklig	2
	Triangelns area är därmed $\frac{1}{2}\sqrt{2}s \cdot \sqrt{9}s = \frac{3}{2}\sqrt{2}s^2$	1
	$\Rightarrow$ det efterfrågade förhållandet är $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ ELLER $\frac{4}{3\sqrt{2}}$	1
	närmevärden	max 3
	s är konstant	-1
	ELLER	
	Längderna av triangelns sidor är $\sqrt{2}s$, $\sqrt{9}s$ och $\sqrt{11}s$.	1
	Arean av kvadraten N_2 är $2s^2$.	1
	$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{11}}$	1
	$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{\frac{2}{11}}$	1
	Triangelns area är därmed $\frac{1}{2}\sqrt{11}s \cdot \sqrt{9}s \sin\alpha = \frac{3}{2}\sqrt{2}s^2$	1
	$\Rightarrow$ det efterfrågade förhållandet är $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ ELLER $\frac{4}{3\sqrt{2}}$	1
	Fjärde och femte punkten kan beräknas genom $\sin(\cos^{-1}(\alpha)) = \sqrt{\frac{2}{11}}$ (även om räknat med räknare), ifall svaret är det exakta värdet.	
	I svaret har α ett närmevärde, men svaret/sinus är svaret exakt	max 5
	närmevärde, även svaret	max 3
	Om svaret har nåtts genom Herons formell, motsvarar användningen av formeln poängen 3-5 i den tidigare modellen, dvs. första, andra och sjätte poängen kommer som i de andra poängmodellerna.	max 6

13.	Vi väljer (exempelvis) a_k så att $\sin(\frac{1}{a_k}) = 0$ för varje värde på k	1
	dvs. $\frac{1}{a_k}$ är en multipel av π.	1
	Genom valet $a_k = \frac{1}{\pi k}$ gäller att $a_k \to 0$ och $\lim \sin(\frac{1}{a_k}) = \lim 0 = 0$.	1
	Vi väljer (exempelvis) a_k så att $\sin(\frac{1}{a_k}) = \sin(t)$ för varje värde på k	1
	dvs. $\frac{1}{a_k}$ är av formen $t + 2\pi n$ för något naturligt tal n.	1
	Genom valet $a_k = \frac{1}{t+2\pi k}$ gäller att $a_k \to 0$ och $\lim \sin(\frac{1}{a_k}) = \lim \sin(t) = \sin(t)$.	1
	geometrisk lösning, t.ex. genom att rita en linje i bilden	2+2