YLIOPPILASTUTKINTOLAUTAKUNTA
STUDENTEXAMENSNÄMNDEN

MATEMATIIKAN KOE, PITKÄ OPPIMÄÄRÄ 25.9.2017
HYVÄN VASTAUKSEN PIIRTEITÄ

Alla oleva vastausten piirteiden, sisältöjen ja pisteitysten luonnehdinta ei sido ylioppilastutkintolautakunnan arvostelua. Lopullisessa arvostelussa käytettävistä kriteereistä päättää tutkintoaineen sensorikunta.

Hyvästä suorituksesta näkyy, miten vastaukseen on päädytty. Ratkaisussa on oltava tarvittavat laskut tai muut riittävät perustelut sekä lopputulos. Arvioinnissa kiinnitetään huomiota kokonaisuuteen, ja ratkaisu pyritään arvioimaan kolmiosaisesti: alku, välivaiheet ja lopputulos. Laskuvirheet, jotka eivät olennaisesti muuta tehtävän luonnetta, eivät alenna pistemäärää merkittävästi. Sen sijaan tehtävän luonnetta muuttavat lasku- ja mallinnusvirheet saattavat alentaa pistemäärää huomattavasti.

Laskin on kokeen apuväline, jonka rooli arvioidaan tehtäväkohtaisesti. Jos ratkaisussa on käytetty symbolista laskintaa, sen on käytävä ilmi suorituksesta. Analysointia vaativien tehtävien ratkaisemisessa pelkkä laskimella saatu vastaus ei riitä ilman muita perusteluja. Sen sijaan laskimesta saatu tulos yleensä riittää rutiinitehtävissä ja laajempien tehtävien rutiiniosissa. Tällaisia ovat esimerkiksi lausekkeiden muokkaaminen, yhtälöiden ratkaiseminen sekä funktioiden derivointi ja integrointi.

A-osa

1.	$f'(x) = 5x^4 + 5$	1
	$f'(2) = 5 \cdot 16 + 5 = 85$	1
	$g'(x) = \cos(x)$	1
	$g'(\pi) = \cos(\pi) = -1$	1
	$h'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$	1
	$h'(2t) = \frac{1-\ln(2t)}{4t^2}$	1

2.	A, F, C, E, D, B, G	3
	A, B, E, F, D, G	3
	Osapisteet annetaan oikeiden peräkkäisten askelien määrän perusteella (esim. A–F ja F–C a-osassa). Ensimmäinen piste saadaan kahdella oikealla parilla, toinen neljällä oikealla.	

3.	Vastaukset: $x = 1{,}7$, $x = 3{,}7$, $x = 5{,}5$, $x = -3{,}8$ tai $x = -1{,}7$	1 p./3 kpl 2 p./5 kpl
	$0 < x < 1{,}7$	2
	$3{,}7 < x < 4{,}9$	2
	Eri luvut (1,7 ja 3,7) kuin omassa a-kohdassa	maks. 3
	Mukana myös muita välejä	maks. 2
	Kaikki luvut $\pm 0{,}1$ kelpaavat myös, paitsi 0.	
	$<$ sijaan $\leqslant$	-0

4.	$f'(t) = a\cos(at)$	1
	Koska $a > 0$, $\lvert f'(t)\rvert = a\lvert\cos(at)\rvert$	1
	Koska $\max\lvert\cos\rvert = 1$, on $\max\lvert f'\rvert = a = 2$	1
	$D(e^{g(x)}) = e^{g(x)}g'(x)$	1
	$\Rightarrow g'(x) = 6x + 1$	1
	$\Rightarrow g(x) = 3x^2 + x + C$ ja ehdosta $g(0) = C = 3$ saadaan $g(x) = 3x^2 + x + 3$	1

B1-osa

5.

Merkitään annetun kulman vastaista kateettia b ja viereistä kateettia a sekä pienemmän neliön sivua c.	
$a + b = 1$ on ison neliön sivun pituus.	1
Kolmiosta $\tan(12{,}7°) = \frac{b}{a}$	1
$\Rightarrow a \approx 0{,}184$ ja $b \approx 0{,}816$	1
Pythagoraan lauseesta $c = \sqrt{a^2 + b^2}$	1
$c \approx 0{,}837$ eli sivu on noin 84 prosenttia suuremmasta sivusta.	1
$c^2 \approx 0{,}700$ eli pinta-ala on noin 70 prosenttia suuremmasta pinta-alasta.	1

6.

Kartion pohjan ympärysmitta on 3α ja säde siis $r = \frac{3\alpha}{2\pi}$	1
ja korkeus Pythagoraan lauseesta $h = \sqrt{3^2 - (\frac{3\alpha}{2\pi})^2} = \frac{3}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}$	1
Kartion tilavuus on siten $V = \frac{\pi}{3}r^2 h = \frac{9}{8\pi^2}\alpha^2\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}$	1
Muuttujavaihdolla ($x = \alpha^2$) riittää lausekkeen $x\sqrt{4\pi^2 - x}$ maksimointi tai sen neliön $x^2(4\pi^2 - x)$ maksimointi.	1
Derivaatalla saadaan maksimi kun $x = \frac{8\pi^2}{3}$	1
eli $\alpha = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$	1
Maksimointi laskimella	maks. 6
Vastauksena suurin tilavuus	-1

7.

Mahdollisia jonoja kaikkiaan on $6^3 = 216$ kappaletta.	1
Nousevia aritmeettisia jonoja niistä ovat 123, 234, 345, 456, 135, 246.	1
Todennäköisyys on siis $\frac{6}{6^3} = \frac{1}{36}$.	1
Geometrisia jonoja ovat 124 ja 421	1
sekä 111, 222, 333, 444, 555 ja 666.	1
Todennäköisyys on siis $\frac{8}{6^3} = \frac{1}{27}$.	1

8.

$P_5(1) = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} \approx 2{,}7166667$	1
$\frac{\lvert P_5(1) - e\rvert}{e} \approx 0{,}00059418$ eli noin 0,059 prosenttia tarkkaa arvoa pienempi	1
Lasketaan $P_n'(x) = 0 + \frac{1}{1!} + \frac{2x}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \ldots + \frac{nx^{n-1}}{n!}$	1
Koska $\frac{kx^{k-1}}{k!} = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$, nähdään, että tämä on sama kuin P_{n-1}.	1
Pelkkä laskin	0
$\lvert P_n(x) - P_n'(x)\rvert = \frac{x^n}{n!}$ b-kohdan nojalla	1
Tutkitaan funktiota suurimmalla x-arvolla 1 eli $\frac{1}{n!} < 10^{-6}$; kokeilemalla havaitaan, että $\frac{1}{10!} < 10^{-6} < \frac{1}{9!}$, eli kysytty luku on $n = 10$.	1

9.

Lasketaan $\int_0^T f(t)\,dt = /_0^T(-e^{at})$	1
$= 1 - e^{-aT}$	1
Kun $T \to \infty$, tästä saadaan $\int_0^\infty f(t)\,dt = 1$.	1
Pelkkä laskin	0
Mediaani saadaan sillä arvolla T, jolla $\int_0^T f(t)\,dt = \frac{1}{2}$	1
a-kohdasta $1 - e^{-aT} = \frac{1}{2}$	1
eli $a = \frac{\ln 2}{T} \approx 0{,}015$ $(\frac{1}{\text{min}})$.	1

B2-osa

10.

Esimerkiksi 9 on positiivinen kokonaisluku, joka on jaollinen kolmella. Se ei kuitenkaan ole jaollinen kuudella, joten väite ei pidä paikkaansa.	2
Päättelyssä oletetaan haluttu johtopäätös ja johdetaan siitä oletus. Siten päättely ei ole loogisesti pätevä.	2
Todistuksessa osoitetaan, että jos kokonaisluku on jaollinen luvulla 6, niin se on jaollinen luvulla 3.	2

11.

Puolisuoran pisteet ovat muotoa $\sigma\overline{s}$.	1
Pitää siis ratkaista yhtälöryhmä $$\begin{cases}\sigma\,\overline{s} = \alpha\,\overline{a} + \beta\,\overline{b} + \gamma\,\overline{c}\\ \alpha + \beta + \gamma = 1\end{cases}$$ muuttujien α, β, γ ja σ suhteen.	3
Koska yhtälöryhmän ratkaisu toteuttaa ehdon $\alpha, \beta, \gamma, \sigma \geqslant 0$ nähdään, että puolisuora osuu kolmioon (tarkemmin sanottuna sen reunaan).	2
Yhtälöryhmä ratkaistu laskimella	maks. 6
Vastattu, että ei osu kolmioon vaan sen reunaan	maks. 6

12.

Piiretty oikean näköinen kuvaaja xy-koordinaatistoon	1
Piiretty oikean näköinen kuvaaja yx-koordinaatistoon	1
$f'(x) = \frac{1}{2}x^2$ joten $f'(2) = 2$	1
$f^{-1}(x) = (6x)^{1/3}$ ja $f(2) = \frac{4}{3}$, joten $(f^{-1})'(f(2)) = \frac{1}{3}(6 \cdot \frac{4}{3})^{-2/3} \cdot 6 = \frac{1}{2}$	1
$(f^{-1})'(f(x))$ on yx-koordinaatiston käyrän tangentin kulmakerroin, joka on alkuperäisen käyrän tangentin kulmakertoimen käänteisluku.	2

13.

$\int_1^4 f(t)\,dt = F(4) - F(1)$	1
$= 2$	1
f on vakio kun integraalifunktio on suora,	1
eli väleillä $[2, 3]$, $[3; 4{,}5]$ ja $[10, 12]$.	1
f on aidosti vähenevä, kun F:n kuvaajan tangentin kulmakerroin vähenee, eli käyrä on ylöspäin kupera.	1
$\Rightarrow$ noin $[6{,}2; 8{,}8]$	1
välin päätepisteet $\pm 0{,}2$	-0