YLIOPPILASTUTKINTOLAUTAKUNTA
STUDENTEXAMENSNÄMNDEN

MATEMATIIKAN KOE, PITKÄ OPPIMÄÄRÄ 22.3.2017
HYVÄN VASTAUKSEN PIIRTEITÄ

Tutkintoaineen sensorikokous on hyväksynyt seuraavat hyvän vastauksen piirteet.

Hyvästä suorituksesta näkyy, miten vastaukseen on päädytty. Ratkaisussa on oltava tarvittavat laskut tai muut riittävät perustelut sekä lopputulos. Arvioinnissa kiinnitetään huomiota kokonaisuuteen, ja ratkaisu pyritään arvioimaan kolmiosaisesti: alku, välivaiheet ja lopputulos. Laskuvirheet, jotka eivät olennaisesti muuta tehtävän luonnetta, eivät alenna pistemäärää merkittävästi. Sen sijaan tehtävän luonnetta muuttavat lasku- ja mallinnusvirheet saattavat alentaa pistemäärää huomattavasti.

Laskin on kokeen apuväline, jonka rooli arvioidaan tehtäväkohtaisesti. Jos ratkaisussa on käytetty symbolista laskintaa, sen on käytävä ilmi suorituksesta. Analysointia vaativien tehtävien ratkaisemisessa pelkkä laskimella saatu vastaus ei riitä ilman muita perusteluja. Sen sijaan laskimesta saatu tulos yleensä riittää rutiinitehtävissä ja laajempien tehtävien rutiiniosissa. Tällaisia ovat esimerkiksi lausekkeiden muokkaaminen, yhtälöiden ratkaiseminen sekä funktioiden derivointi ja integrointi.

Pisteohjeen tulkintaohjeet:

- Hyväksytyt tarkkuudet: ±1 merkitsevä numero pisteytysohjeeseen nähden kelpaa, ellei ohjeissa erikseen muuta sanota.
- Sulkeissa oleva rivi: pisteen saa myös, jos seuraava kohta/rivi oikein, eli pisteeseen oikeuttavaa asiaa ei tarvitse välttämättä eksplisiittisesti todeta ratkaisussa.
- "•" korostaa, että tämä piste on riippumaton muista pisteistä.
- "⇒" tarkoittaa, että pisteen saa vain, jos perustelu (edellinen kohta/rivi) on kunnossa.
- Muista myös yleiset pisteitysohjeet.

A-osa

1.	Sijoitus ratkaisukaavaan $\frac{7\pm\sqrt{7^2+4\cdot 2\cdot 4}}{4}$ TAI toinen juuri löydetty ja tarkistettu	1
	$\Rightarrow x = -\frac{1}{2}$ tai $x = 4$	1
	(vertaamalla kertoimia) $2a = 14$ ja $a^2 = b$ TAI (muodostetamalla yhtälön) $x^2 + 2ax + a^2 = x^2 + 14x + b$	1
	$\Rightarrow a = 7$ ja $b = 49$	1
	Valittu jotkut testipisteet, saatu yhtälöpari ja ratkaistu a ja b näillä testipistevalinnoilla	max 1
	Sijoitettu (mistä tahansa saatu) $a = 7$ ja $b = 49$ ja sievennetty	2
	$4c + d = 1$ ja $7c + d = 3$	1
	$\Rightarrow c = \frac{2}{3}$ ja $d = -\frac{5}{3}$ joten $x = \frac{5}{2}$	1
	TAI	
	Piirretty suora pisteiden $(4, 1)$ ja $(7, 3)$ läpi	1
	$\Rightarrow x = \frac{5}{2}$	1
2.	Vastauksesta 1 piste per kohta	
	D, A, B	
	D, C, E	
3.	Pituuden minimi saavutetaan pisteessä, jossa $\overline{c}_t$ on kohtisuorassa vektorin $\overline{d} = \overline{b} - \overline{a}$ kanssa (tai päätepisteessä)	1
	$\overline{d} = \overline{i} - 2\overline{j} + 2\overline{k}$	1
	$\overline{d} \cdot \overline{a} = 1 - 4 + 6 = 3$ ja $\overline{d} \cdot \overline{b} = 2 + 0 + 10 = 12$	1
	Siten $\overline{c}_t \cdot \overline{d} = 3t + 12(1 - t)$	1
	Ratkaisemalla nollakohta $t = \frac{4}{3}$	1
	Koska $-2 \leqslant \frac{4}{3} \leqslant 2$ saavutetaan minimi tällä parametrin arvolla eikä päätepisteessä.	1
	TAI	
	$\overline{c}_t = (t+2(1-t))\overline{i} + 2t\overline{j} + (3t+5(1-t))\overline{k}$ tai vastaava muoto (kertoimet koottu) $= (2-t)\overline{i} + 2t\overline{j} + (5-2t)\overline{k}$	1
	$\lvert\overline{c}_t\rvert^2 = (2-t)^2 + (2t)^2 + (5-2t)^2$	1
	$= 9t^2 - 24t + 29$	1
	Derivaatta $18t - 24$	1
	Nollakohta $t = \frac{4}{3}$	1
	Merkkikaavio tai reunatarkastelu	1

4.

Kaikki samankantaisiksi ($\frac{\ln y}{\ln 4} = \frac{\ln x}{\ln 2}$)	1
• sievennys $\frac{\ln 4}{\ln 2} = 2$ tai $\frac{\ln 2}{\ln 4} = \frac{1}{2}$	1
• eroon logaritmeista eksponentiaalifunktiolla ($y = x^2$)	1
sieventämätön vastaus $y = x^{\ln 4/\ln 2}$	2
sieventämätön vastaus $y = 4^{\log_2 x}$	1
$\int_2^3 f(x)\,dx$, missä f on a-kohdan funktio (vaikka virheellinenkin)	1
$= F(3) - F(2)$, missä $F' = f$ (esim. $\Big/_2^3 \frac{1}{\ln 4/\ln 2+1} x^{\ln 4/\ln 2+1}$)	1
Sievennetty vastaus $\frac{19}{3}$	1
Pelkkä piirros	0
Vastaus a-kohdassa lineaarinen, pinta-ala laskettu geometrisesti, esim. suorakulmion tai kolmion alan kaavalla	1

B1-osa

5.

(Kun $x \leqslant 1$, on $\lvert x-1\rvert = 1 - x$)	1
$f(x) = 2 - x$	1
Vastauksessa $\pm$ (ei hyödynnetty x:n rajausta, esim. $f(x) = 1 \pm (1-x)$)	0
Vastattu myös, että $f(x) = x$ kun $x \geqslant 1$	-0
(Pyörähdyskappaleen tilavuus saadaan kaavasta $\pi \int_0^2 f(x)^2\,dx$ JA sijoitettu f:n paikalle funktio (myös virheellinen))	1
• $\int_0^1 (2-x)^2\,dx = -\Big/_0^1 \frac{1}{3}(2-x)^3 = \frac{7}{3}$	1
• $\int_1^2 x^2\,dx = \frac{7}{3}$ TAI symmertia	1
$\Rightarrow$ tilavuus on $\frac{14\pi}{3}$	1
π puuttuu	max 3
integroitu laskimella	max 4
integroitu vain $\int_0^1$ tai $\int_1^2$	max 2
TAI	
• Tilavuus voidaan laskea katkaistuina kartioina (2 kpl)	1
Säteet 2 ja 1, korkeus 1	1
$\Rightarrow$ Tilavuus $\frac{\pi}{3}h(r_1^2 + r_1 r_2 r_2^2) = \frac{7\pi}{3}$	1
• symmetria $\Rightarrow$ tuplatilavuus	1

6.	**Jäljelle jäävää osaa verraten**	
	Kolmion A_1 pidemmän kateetin pituus on $s\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}s}{2}$.	1
	Kolmio, josta on poistettu A_1 on yhdenmuotoinen alkuperäisen kanssa, skaalauskerroin on $\frac{\sqrt{3}}{2}$.	1
	Iteroimalla, kun kolmiosta on poistettu $A_1, \ldots, A_n$, on jäljellä kolmio jonka lyhyt kateetti on $(\frac{\sqrt{3}}{2})^n s$.	1
	Jäljelle jäävän kolmion pinta-ala on $(\frac{\sqrt{3}}{2})^{2n} s^2$ alkuperäisen kolmion pinta-alasta.	1
	Ratkaistaan siis yhtälö $(\frac{\sqrt{3}}{2})^{2n} = 0{,}03$	1
	$\Rightarrow$ ratkaisu 12,189 joten $n = 13$	1
	TAI	
	Poistettuja kolmioita laskien	
	$A_1 = \frac{3\sqrt{2}}{8}s^2$	1
	peräkkäisten kolmioiden sivujen suhde $\frac{\sqrt{3}}{2}$ TAI pinta-alojen suhde $\frac{3}{4}$	1
	$\Rightarrow A_{k+1} = \frac{3}{4}A_k$ josta $A_k = (\frac{3}{4})^{k-1}A_1$ TAI A_k on geometrinen jono	1
	• koko pinta-ala $\sum A_k = 4A_1$ geometrisen sarjan summasta laskettuna TAI alkuperäisestä kolmiosta pääteltynä	1
	etsitään n, jolle $\sum_{k=1}^{n} A_k \geqslant 4 \cdot 0{,}97A_1$	1
	$\Rightarrow n > 12{,}189$ joten $n = 13$	1
	Ratkaisun voi tehdä myös taulukoiden, likiarvot (väh. 3 desimaalia) ok	
	$n = 12$	-1
	s puuttuu tai $s = 1$	-1
	taulukko kahdella desimaalilla	max 5
7.	Merkitään sisäsädettä r ja sisäkorkeutta h (mm). Tilavuusehdosta saadaan $\pi r^2 h = 200000$ (mm^3).	1
	Pohjan tilavuus $\pi(r+2)^2 \cdot 5$	1
	Seinämän tilavuus $\pi[(r+2)^2 - r^2]h$	1
	Minimoitava lauseke on $\pi(4r+4)\frac{200000}{\pi r^2} + 5\pi(r+2)^2$.	1
	Derivaatta $800000(-r^{-2} - 2r^{-3}) + 10\pi(r+2)$ $(= (r+2)(10\pi r^3 - 800000)r^{-3})$	1
	$\Rightarrow$ minimi saavutetaan kun $r = \sqrt[3]{\frac{80000}{\pi}} \approx 29{,}42$. Halkaisija on siten $2(r+2) \approx 62{,}84 \approx 62{,}8$ ja korkeus $h + 5 \approx 78{,}55 \approx 78{,}6$.	1
	Minimointi laskimella	-0
	Yksikkömuunnos tekemättä, jolloin seurauksena esim. $\ell = \mathrm{mm}^3$ tai $\pi r^2 h = 2$	0 p.
	Yksikkömuunnos väärin $\ell = 1000\ \mathrm{mm}^3$, $d\ell = 1000000\ \mathrm{mm}^3$	max 4
8.	• (Derivaatta $12x^2 + 36x + 23$)	1
	• Graafinen tarkastelu tai taulukointi osoittaa, että lähin nollakohta on lähellä pistettä$-0{,}5$.	1
	Sopivasti valittu alkupiste, esim. $x_0 = -0{,}5$ (kaikki $x_0 > -0{,}923$ käy)	1
	Newtonin menetelmän ensimmäinen iteraatio	1
	Newtonin menetelmän iteraatiot siihen asti, että neljä desimaalia pysyy samana	1
	$\Rightarrow$ Vastaus: $x \approx -0{,}442546229 \approx -0{,}4425$	1
	iteraatio kohti $-2{,}430$ lähellä olevaa nollakohtaa	max 2
	iteraatio kohti $-1{,}627$ lähellä olevaa nollakohtaa	max 4
	väärää derivaatta	max 3

9.	Tutkitaan ensin tapausta, jossa luvuista p, q ja r vähintään 2 on parillisia.	1
	Kahden parillisen luvun summa on parillinen, joten tulo $(p+q)(q+r)(r+p)$ on parillinen.	2
	Tutkitaan sitten tapausta, jossa luvuista p, q ja r vähintään 2 on paritonta.	1
	Kahden parittoman luvun summa on parillinen, joten tulo $(p+q)(q+r)(r+p)$ on parillinen.	2
	(taulukointi) 0, 1, 2 tai 3 parillista/paritonta	1 p./kohta
	(taulukointi) 0, 1, 2 ja 3 parillista/paritonta	5
	taulukointi + perustelu miksi taulukointi riittää	6
	Kokeiltu joitain lukuja	0
	p, q, r peräkkäisiä, mutta tutkittu parillisuutta/parittomuutta	max 1
	Yleiskommentti: Tähän on hyvin monta oikeaa ratkaisutapaa	max 6

B2-osa

10.	• Marin vastaus on oikea TAI todettu, että $4e^{2x}$ on oikein (riittää jos tämä on todettu jossain kohtaa ratkaisua).	1
	• Elmeri ei ole ottanut huomioon sisäfunktion derivaattaa.	1
	• Oikea kaava on $h'(x) = g'(f(x))f'(x) = 4e^x e^x = 4e^{2x}$.	1
	• Uolevi on laskenut potenssit väärin.	1
	• $(e^x)^2 = e^{2x}$, joten $h(x) = 2e^{2x} + 1$	1
	$\Rightarrow$ sisäfunktion derivaatan avulla $h'(x) = 4e^{2x}$	1

11.	**Päättelyratkaisu**	
	Koska arvosanan 9 ylittäviä arvosanoja on selvästi enemmän kuin sen alittavia, päätellään, että keskiarvo on yli 9.	1
	Toisaalta, koska 9 on tavallisempi arvosana kuin 10, on keskiarvo alle 9,5.	1
	Arvosanojen 8 painolla keskiarvon pitää siis olla $9\frac{1}{4}$ eli "9+".	1
	TAI	
	Ratkaisut, joissa pylväitä on mitattu	max 3
	Käytetty prosentteja siten, että kokonaismäärä on alle 80% tai yli 120%.	max 2
	Vastaus 9,0 TAI 9,5	max 2
	Pelkkä vastaus 9 – 9,5	1
	Väärä tarkkuus (1/4 arvosanaa)	-1
	Vastauksena jakauma (jos frekvenssit, niin yhteensä $\approx$ 1000 vastausta, jos prosentteja, niin yhteensä $\approx$ 100 %)	1
	Laskettu/arvioitu em. jakauman keskiarvo, yli 50 % vastaajista yli keskiarvon	1
	Laskettu/arvioitu em. jakauman keskiarvo, yli 80 % vastaajista yli keskiarvon	1
	Jakaumaksi käy esimerkiksi (5, 10, 80, 5) tai (0,0,1,99) prosenttia arvosanoille 7–10.	

12.	Kolmion sivut ovat $\sqrt{2}s$, $\sqrt{9}s$ ja $\sqrt{11}s$.	1
	Neliön N_2 pinta-ala on $2s^2$.	1
	Koska $9+2=11$, niin Pythagoraan lauseen mukaan kolmio on suorakulmainen.	2
	Kolmion pinta-ala on siten $\frac{1}{2}\sqrt{2}s \cdot \sqrt{9}s = \frac{3}{2}\sqrt{2}s^2$	1
	$\Rightarrow$ kysytty suhde on $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ TAI $\frac{4}{3\sqrt{2}}$	1
	likiarvot	max 3
	s on vakio	-1
	TAI	
	Kolmion sivut ovat $\sqrt{2}s$, $\sqrt{9}s$ ja $\sqrt{11}s$.	1
	Neliön N_2 pinta-ala on $2s^2$.	1
	$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{11}}$	1
	$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{\frac{2}{11}}$	1
	Kolmion pinta-ala on siten $\frac{1}{2}\sqrt{11}s \cdot \sqrt{9}s \sin\alpha = \frac{3}{2}\sqrt{2}s^2$	1
	$\Rightarrow$ kysytty suhde on $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ TAI $\frac{4}{3\sqrt{2}}$	1
	Neljännen ja viidennen pisteen voi saada myös laskulla $\sin(\cos^{-1}(\alpha)) = \sqrt{\frac{2}{11}}$ (vaikka se olisi laskimella tehty), kunhan vastauksena on tarkka arvo.	
	Vastauksessa α:lle likiarvo, mutta vastaus/sinin arvo tarkka	max 5
	likiarvot, ml. vastaus	max 3
	Mikäli ratkaisu tehty Heronin kaavalla, vastaa kaavan käyttäminen pisteitä 3-5 edellisissä malleissa, eli ensimmäinen, toinen ja kuudes piste tulevat kuten muissakin pisteytysmalleissa.	max 6

13.	Valitaan (esimerkiksi) a_k niin, että $\sin(\frac{1}{a_k}) = 0$ jokaisella k	1
	eli $\frac{1}{a_k}$ on π:n monikerta	1
	Valinnalla $a_k = \frac{1}{\pi k}$ pätee $a_k \to 0$ ja $\lim \sin(\frac{1}{a_k}) = \lim 0 = 0$.	1
	Valitaan (esimerkiksi) a_k niin, että $\sin(\frac{1}{a_k}) = \sin(t)$ jokaisella k	1
	eli $\frac{1}{a_k}$ on muotoa $t + 2\pi n$ jollain luonnollisella luvulla n.	1
	Valinnalla $a_k = \frac{1}{t+2\pi k}$ pätee $a_k \to 0$ ja $\lim \sin(\frac{1}{a_k}) = \lim \sin(t) = \sin(t)$.	1
	geometrinen ratkaisu, esim. piirretty suora kuvaan	2+2