MATEMATIKPROV, LÅNG LÄROKURS 25.9.2017
BESKRIVNING AV GODA SVAR

De beskrivningar av svarens innehåll och poängsättningar som ges här är inte bindande för studentexamensnämndens bedömning. Censorerna beslutar om de kriterier som används i den slutgiltiga bedömningen.

Av en god prestation framgår det hur examinanden har kommit fram till svaret. I lösningen måste det ingå nödvändiga uträkningar eller andra tillräckliga motiveringar och ett slutresultat. I bedömningen fästs uppmärksamhet vid helheten och vid de tre stegen start, mellansteg och slutresultat. Räknefel som inte väsentligt ändrar uppgiftens natur ger ingen betydande sänkning av antalet poäng. Räknefel och fel i den matematiska modellen som ändrar uppgiftens natur kan däremot sänka antalet poäng avsevärt.

I provet är räknaren ett hjälpmedel, och dess roll bedöms separat för varje uppgift. Om symbolräknare använts i en uppgift ska det framgå av prestationen. I lösningar av uppgifter som kräver analys räcker det inte enbart med ett svar som erhållits med hjälp av räknaren utan övriga motiveringar. Däremot räcker ett svar som examinanden fått med räknaren i allmänhet i rutinberäkningar. Detsamma gäller rutinmässiga delar av mera omfattande uppgifter. Exempel på sådana är omskrivning av uttryck, ekvationslösning samt derivering och integrering av funktioner.

Del A

1.

$f'(x) = 5x^4 + 5$	1
$f'(2) = 5 \cdot 16 + 5 = 85$	1
$g'(x) = \cos(x)$	1
$g'(\pi) = \cos(\pi) = -1$	1
$h'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$	1
$h'(2t) = \frac{1-\ln(2t)}{4t^2}$	1

2.

A, F, C, E, D, B, G	3
A, B, E, F, D, G	3
Delpoängen ges utifrån antalet på varandra följande korrekta steg (exempelvis A–F och F–C i a-delen). Den första poängen får man med två korrekta par och den andra med fyra korrekta par.	

3.

Svar: $x = 1{,}7$, $x = 3{,}7$, $x = 5{,}5$, $x = -3{,}8$ eller $x = -1{,}7$	1 p./3 st. 2 p./5 st.
$0 < x < 1{,}7$	2
$3{,}7 < x < 4{,}9$	2
Andra tal (1,7 och 3,7) än de tal som man använt i a-fallet	max 3
Även andra intervall medtagna	max 2
Alla tal $\pm 0{,}1$ duger också, förutom 0.	
$\leqslant$ i stället för $<$	-0

4.

$f'(t) = a\cos(at)$	1
Eftersom $a > 0$, $\lvert f'(t)\rvert = a\lvert\cos(at)\rvert$	1
Eftersom $\max\lvert\cos\rvert = 1$, är $\max\lvert f'\rvert = a = 2$	1
$D(e^{g(x)}) = e^{g(x)}g'(x)$	1
$\Rightarrow g'(x) = 6x + 1$	1
$\Rightarrow g(x) = 3x^2 + x + C$ och från villkoret $g(0) = C = 3$ får vi $g(x) = 3x^2 + x + 3$	1

Del B1

5.	Vi betecknar den motstående kateten till den givna vinkeln med b och den närliggande kateten med a och den mindre kvdratens sida med c.	
	$a+b=1$ är längden av den större kvadratens sida.	1
	Ur triangeln $\tan(12{,}7°)=\frac{b}{a}$	1
	$\Rightarrow a\approx 0{,}184$ och $b\approx 0{,}816$	1
	Pythagoras sats ger $c=\sqrt{a^2+b^2}$	1
	$c\approx 0{,}837$ dvs. sidan är cirka 84 procent av den större kvadratens sida.	1
	$c^2\approx 0{,}700$ dvs. arean är cirka 70 procent av den större kvadratens area.	1

6.	Omkretsen för bottnen på en kon är 3α och bottnens radie är $r=\frac{3\alpha}{2\pi}$	1
	och Pythagoras sats ger höjden $h=\sqrt{3^2-(\frac{3\alpha}{2\pi})^2}=\frac{3}{2\pi}\sqrt{4\pi^2-\alpha^2}$	1
	Konens volym är därmed $V=\frac{\pi}{3}r^2h=\frac{9}{8\pi^2}\alpha^2\sqrt{4\pi^2-\alpha^2}$	1
	Med ett variabelbyte ($x=\alpha^2$) räcker det att maximera uttrycket $x\sqrt{4\pi^2-x}$ eller dess kvadrat $x^2(4\pi^2-x)$.	1
	Vi får med hjälp av derivatan maximum då $x=\frac{8\pi^2}{3}$	1
	dvs. $\alpha=2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$	1
	Maximering med räknare	max 6
	Som svar största volymen	−1

7.	Antalet möjliga talföljder är totalt $6^3=216$.	1
	De strängt växande talföljderna är 123, 234, 345, 456, 135, 246.	1
	Sannolikheten är alltså $\frac{6}{6^3}=\frac{1}{36}$.	1
	De geometriska talföljderna är 124 och 421	1
	samt 111, 222, 333, 444, 555 och 666.	1
	Sannolikheten är alltså $\frac{8}{6^3}=\frac{1}{27}$.	1

8.	$P_5(1)=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}\approx 2{,}7166667$	1
	$\frac{\lvert P_5(1)-e\rvert}{e}\approx 0,000594185$ dvs. cirka 0,059 procent mindre än det exakta värdet	1
	Vi beräknar $P_n'(x)=0+\frac{1}{1!}+\frac{2x}{2!}+\frac{3x^2}{3!}+\ldots+\frac{nx^{n-1}}{n!}$.	1
	Eftersom $\frac{kx^{k-1}}{k!}=\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$ ser vi att det här är detsamma som P_{n-1}.	1
	Enbart räknare	0
	$\lvert P_n(x)-P_n'(x)\rvert=\frac{x^n}{n!}$ med stöd av deluppgift b	1
	Vi undersöker funktionen med det största x-värdet 1, dvs. $\frac{1}{n!}<10^{-6}$; genom prövning observerar vi att $\frac{1}{10!}<10^{-6}<\frac{1}{9!}$, dvs. det efterfrågade talet är $n=10$.	1

9.	Vi beräknar $\int_0^T f(t)\,dt = /_0^T(-e^{at})$	1
	$=1-e^{-aT}$	1
	Då $T\to\infty$, får vi $\int_0^\infty f(t)\,dt=1$.	1
	Enbart räknare	0
	Medianen fås för det värde på T för vilket $\int_0^T f(t)\,dt=\frac{1}{2}$	1
	från deluppgift a $1-e^{-aT}=\frac{1}{2}$	1
	dvs. $a=\frac{\ln 2}{T}\approx 0{,}015$ $(\frac{1}{\text{min}})$.	1

Del B2

10.

Till exempel talet 9 är ett positivt heltal som är delbart med talet tre. Talet är emellertid inte delbart med talet sex, så påståendet är alltså falskt.	2
I slutledningen antar Johan det önskade resultatet (slutsatsen) och härleder antagandet ur det. Därmed är slutledningen inte logiskt giltig.	2
I beviset visar han att om ett heltal är delbart med talet 6, så är talet delbart med talet 3.	2

11.

Strålens punkter är i formen $\sigma\overline{s}$.	1
Vi måste alltså lösa ekvationssystemet $\begin{cases}\sigma\,\overline{s}=\alpha\,\overline{a}+\beta\,\overline{b}+\gamma\,\overline{c}\\ \alpha+\beta+\gamma=1\end{cases}$ med avseende på variablerna α, β, γ och σ.	3
Eftersom ekvationssystemets lösning uppfyller kravet $\alpha,\beta,\gamma,\sigma\geqslant 0$ märker vi att strålen träffar triangeln (noggrannare uttryckt triangelns rand).	2
Ekvationssystemet löst med räknare	max 6
Svarat att strålen inte träffar triangeln utan dess rand	max 6

12.

En graf som ser korrekt ut uppritad i ett xy-koordinatsystem	1
En graf som ser korrekt ut uppritad i ett yx-koordinatsystem	1
$f'(x)=\frac{1}{2}x^2$ dvs. $f'(2)=2$	1
$f^{-1}(x)=(6x)^{1/3}$ och $f(2)=\frac{4}{3}$ dvs. $(f^{-1})'(f(2))=\frac{1}{3}(6\cdot\frac{4}{3})^{-2/3}\cdot 6=\frac{1}{2}$	1
$(f^{-1})'(f(x))$ är riktningskoefficienten för tangenten till kurvan i yx-koordinatsystemet, som är det inverterade talet till riktningskoefficienten för tangenten till den ursprungliga kurvan.	2

13.

$\int_1^4 f(t)\,dt=F(4)-F(1)$	1
$=2$	1
f är konstant då integralfunktionens graf är rät,	1
dvs. i intervallet $[2,3]$, $[3;4{,}5]$ och $[10,12]$.	1
f är strängt avtagande då riktingskoefficienten för tangenten till F:s graf avtar, dvs. då kurvan är konkav.	1
$\Rightarrow$ ungefär $[6{,}2;8{,}8]$	1
intervallets ändpunkter $\pm 0{,}2$	-0