MATEMATIKPROV, LÅNG LÄROKURS 23.3.2016
BESKRIVNING AV GODA SVAR

De beskrivningar av svarens innehåll och poängsättningar som ges här är inte bindande för studentexamensnämndens bedömning. Censorerna beslutar om de kriterier som används i den slutgiltiga bedömningen.

Av en god prestation framgår det hur examinanden har kommit fram till svaret. I lösningen måste det ingå nödvändiga uträkningar eller andra tillräckliga motiveringar och ett slutresultat. I bedömningen fästs uppmärksamhet vid helheten och vid de tre stegen start, mellansteg och slutresultat. Räknefel som inte väsentligt ändrar uppgiftens natur ger ingen betydande sänkning av antalet poäng. Räknefel och fel i den matematiska modellen som ändrar uppgiftens natur kan däremot sänka antalet poäng avsevärt.

I provet är räknaren ett hjälpmedel, och dess roll bedöms separat för varje uppgift. Om symbolräknare använts i en uppgift ska det framgå av prestationen. I lösningar av uppgifter som kräver analys räcker det inte enbart med ett svar som erhållits med hjälp av räknaren utan övriga motiveringar. Däremot räcker ett svar som examinanden fått med räknaren i allmänhet i rutinberäkningar. Detsamma gäller rutinmässiga delar av mera omfattande uppgifter. Exempel på sådana är omskrivning av uttryck, ekvationslösning samt derivering och integrering av funktioner.

Preliminär poängsättning

Del A

1. (1 poäng/fall)

	Verbal form	1	2	3
A	Värdet av uttrycket $1{,}1^3$ är	1,13	3,3	1,331
B	Volymen 0,5 m^3 är lika med	50 l	500 l	5 000 l
C	Av talen $\frac{2}{3}, \frac{6}{7}$ och $\frac{16}{21}$ är det största	$\frac{2}{3}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{16}{21}$
D	Det motsatta talet till $-a+b$ är	$b-a$	$a-b$	$-a-b$
E	Summan av rötterna till ekvationen $x^2-3x+1=0$ är	3	4	5
F	Priset på en produkt stiger först med 10 % och sjunker sedan med 10 %, så det slutgiltiga priset är … av det ursprungliga priset.	99 %	100 %	101 %

Del	A	B	C	D	E	F
Alternativ nummer	3	2	2	2	1	1

2. a)	$x-\left(2x^2-\left(3x-4x^2\right)\right)=x-2x^2+3x-4x^2=$	1
	$-6x^2+4x$	1
b)	Talens produkt är $\frac{\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{\left(\sqrt{6}\right)^2}{3\cdot 2}=\frac{6}{6}=1$,	1
	dvs. de är varandras inverterade tal.	1
c)	Då båda leden är positiva kan olikheten kvadreras ledvis, och vi får $a+b<a+b+2\sqrt{ab}$,	1
	vilket är sant eftersom $2\sqrt{ab}>0$.	1

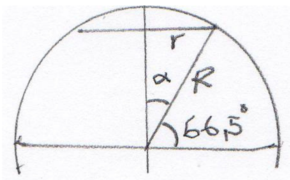
3. a)	$\left\lvert\bar{a}\right\rvert=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$	1
	$\left\lvert\bar{b}\right\rvert=\sqrt{(-1)^2+(-7)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$	1
	$\bar{a}\cdot\bar{b}=2\cdot(-1)+(-3)\cdot(-7)=19$	1
b)	$\int_0^9\left(3+\sqrt{x}\right)dx=\Big/_0^9\left(3x+\tfrac{2}{3}x\sqrt{x}\right)=$	1+1
	$27+\tfrac{2}{3}\cdot 9\cdot 3=27+18=45$.	1

4. a)	Nollställena är $x=0$ och $x=3$.	1+1
b)	Funktionen är strängt växande då $0 \leq x < 5$	2
c)	$x=0$ är ett minimiställe,	1
	eftersom derivatans tecken byts $- \to +$.	1

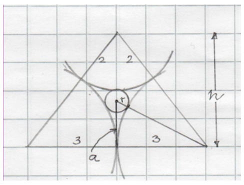
Del B1

5. a)	$P(\text{vinst}) = p_v = \frac{1}{37}$, vilket ger $P(\text{förlust}) = p_h = \frac{36}{37}$.	1
	Väntevärdet i euro är därmed $\frac{1}{37} \cdot 35 + \frac{36}{37} \cdot (-1) = -\frac{1}{37}$ €.	1
b)	$p_v = \frac{3}{37}$ och $p_h = \frac{34}{37}$	1
	Väntevärdet i euro är därmed $\frac{3}{37} \cdot 11 + \frac{34}{37} \cdot (-1) = -\frac{1}{37}$ €.	1
c)	$p_v = \frac{18}{37}$ och $p_h = \frac{19}{37}$	1
	Väntevärdet i euro är därmed $\frac{18}{37} \cdot 1 + \frac{19}{37} \cdot (-1) = -\frac{1}{37}$ €.	1

6. a)	Jordens radie R = 6 371 km. Eftersom polcirkelns breddgrad är ca 66,5, är vinkeln mellan polcirkeln och nordpolsriktningen $\alpha = 90^\circ - 66{,}5^\circ = 23{,}5^\circ$. (Figur nedan)	1
	Polcirkelns radie är $r = R\sin\alpha (= 2540{,}4...\text{km})$.	1
	Längden av tunneln AB är $r\sqrt{2} = R\sqrt{2}\sin\alpha = 3592{,}7\ldots\text{km} \approx$ 3593 km.	1
b)	Längden av den kortare bågen AB längs polcirkeln är $\frac{1}{4} \cdot 2\pi r =$	1
	$\frac{1}{2}\pi R \sin\alpha =$	1
	$3990{,}4...\text{km} \approx 3\,990$ km.	1



7.	I figuren nedan är triangelns höjd $h = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$.	1
	Den lilla cirkelns radie är r och avståndet från medelpunkten till triangelns bas är $a = 4 - (2 + r) = 2 - r$	2
	Pythagoras sats ger: $3^2 + (2 - r)^2 = (3 + r)^2$,	2
	av vilket $10r = 4 \Leftrightarrow r = \frac{2}{5}$.	1



8. a)	Eftersom det i *xy*-planet gäller att $z = 0$ har planets ekvation formen $x + 2y + kz = 3$.	1
	Eftersom planet går genom punkten (2,4,6), så satisfierar punktens koordinater planets ekvation, dvs. $2 + 2 \cdot 4 + 6k = 3$, vilket ger att $k = -\frac{7}{6}$.	1
	Ekvationen är därmed $x + 2y - \frac{7}{6}z = 3$ dvs. $6x + 12y - 7z = 18$.	1
b)	På *x*-axeln är $y = z = 0$, dvs. $6x = 18 \Leftrightarrow x = 3$.	1
	På *y*-axeln är $x = z = 0$, dvs. $12y = 18 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}$.	1
	På *z*-axeln är $x = y = 0$, dvs. $-7z = 18 \Leftrightarrow z = -\frac{18}{7}$.	1

9.1.	Iterationsformeln för att beräkna talet $\sqrt{20}$ är $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{20}{x_n}\right)$, där $n = 1, 2, 3, ...$	2
	Iterering: $x_1 = 1$ $x_2 = 10,5$ $x_3 = 6,2023...$ $x_4 = 4,7134...$ $x_5 = 4,4783...$	2
	Med räknaren $\sqrt{20} \approx 4,47213596$.	1
	Jämförelse: $\frac{x_4}{\sqrt{20}} = 1,0013...$, vilket ger det relativa felet 0,1 %.	1

9.2.	Eftersom $f(0)=0$ är	1
	differenskvoten $\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=$	1
	$\frac{h^2g(h)}{h}=hg(h)$.	1
	Eftersom $\lvert g(h)\rvert \le 20$ för varje h, är	1
	$\lim\limits_{h\to 0} hg(h)=0$,	1
	vilket ger att f är deriverbar i punkten $x=0$ och $f'(0)=0$.	1

Del B2

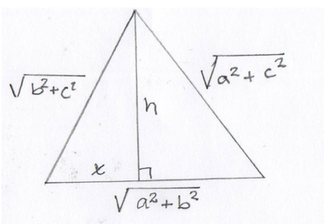
10. a)	Eftersom alla potenser av talet 6 slutar på en sexa, så gör alla potenser av talet 2016 det också. Den sista siffran är därmed 6.	2
b)	Eftersom $x=2016^{2016}$, så är $\lg x = 2016\cdot\lg 2016 = 6661{,}8529...$, av vilket $x=10^{6661{,}8529...}$	1
	$=10^{0{,}8529...}\cdot 10^{6661} = 7{,}1269...\cdot 10^{6661}$, vilket ger att de två första siffrorna är 7 och 1.	1
c)	Eftersom $\lg x = 6661{,}8529...$, har talet 6661 + 1 = 6 662 siffror.	2

11.	Radien av burkens bottendiameter är r och höjden är h. Volymvillkoret ger att $\pi r^2 h = 1000$, av vilket $h=\frac{1000}{\pi r^2}$.	1
	Mantelplåtens pris är 1 €/m^2 och bottenplåtens pris 2 €/m^2. Plåtens totalpris är $H(r)=2\pi r^2\cdot 2+2\pi rh\cdot 1=$	1
	$4\pi r^2+2\pi r\cdot\frac{1000}{\pi r^2}=4\pi r^2+\frac{2000}{r}$, där $r>0$.	1
	$A'(r)=8\pi r-\frac{2000}{r^2}=0 \Leftrightarrow 8\pi r^3-2000=0$ $\Leftrightarrow \pi r^3=250 \Leftrightarrow r^3=\frac{250}{\pi} \Leftrightarrow r=5\cdot\sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}$	1
	Teckenschemat för derivatan $H'(r)$ visar att det erhållna värdet på r är ett minimiställe och därmed också radien för den billigaste burken.	1
	Det efterfrågade förhållandet är $\frac{h}{2r}=\frac{1000}{\pi r^2\cdot 2r}=\frac{500}{\pi r^3}=\frac{500}{250}=2$.	1

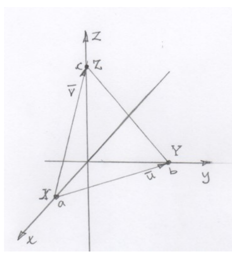
12. a)	Utgående från sinusfunktionens graf observerar vi att $\int_0^{\pi} \sin t\,dt = -\int_{\pi}^{2\pi} \sin t\,dt$.	1
	Därmed gäller $f(\pi) = \int_0^{\pi} \lvert\sin t\rvert\,dt = \int_{\pi}^{2\pi} \lvert\sin t\rvert\,dt$.	1
	Då är $f(2\pi) = \int_0^{\pi} \lvert\sin t\rvert\,dt + \int_{\pi}^{2\pi} \lvert\sin t\rvert\,dt = 2\cdot\int_0^{\pi} \lvert\sin t\rvert\,dt = 2f(\pi)$.	1
b)	Då $0 \le t \le \pi$, är $\lvert\sin t\rvert = \sin t$.	
	Här är $\int_0^{x} \lvert\sin t\rvert\,dt = \int_0^{x} \sin t\,dt = \Big/_{0}^{x}(-\cos t) = -\cos x + \cos 0 = 1 - \cos x$, då $0 \le x \le \pi$.	1
	Då $\pi \le t \le 2\pi$, är $\lvert\sin t\rvert = -\sin t$.	
	Här är $\int_0^{x} \lvert\sin t\rvert\,dt = \int_0^{\pi} \sin t\,dt + \int_{\pi}^{x} (-\sin t)\,dt =$	1
	$\Big/_{0}^{\pi}(-\cos t) + \Big/_{\pi}^{x}\cos t = -\cos\pi + \cos 0 + \cos x - \cos\pi = 3 + \cos x$, då $\pi \le x \le 2\pi$.	1
	Svar: $f(x) = \begin{cases} 1-\cos x, & 0 \le x \le \pi \\ 3+\cos x, & \pi \le x \le 2\pi \end{cases}$	

13.	Sidorna i tetraederns bottentriangel är $\sqrt{a^2+b^2}, \sqrt{b^2+c^2}$ och $\sqrt{a^2+c^2}$.	1
	Med beteckningar i figur 1: $\begin{cases} x^2 + h^2 = b^2 + c^2 \\ \left(\sqrt{a^2+b^2} - x\right)^2 + h^2 = a^2 + c^2 \end{cases}$	1
	Genom att subtrahera ekvationerna ledvis: $x^2 - a^2 - b^2 + 2x\sqrt{a^2+b^2} - x^2 = b^2 - a^2$, av vilket $x = \dfrac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$.	1
	Då gäller $h = \sqrt{b^2+c^2-x^2} = \sqrt{b^2+c^2-\dfrac{b^4}{a^2+b^2}} = \sqrt{\dfrac{(a^2+b^2)(b^2+c^2)-b^4}{a^2+b^2}} = \sqrt{\dfrac{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}{a^2+b^2}}$.	1
	$D = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}\,h = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}$.	1

	Eftersom areorna av trianglarna i axelplanen är $A=\frac{1}{2}bc,\ B=\frac{1}{2}ac$ och $C=\frac{1}{2}ab$, så är $A^2+B^2+C^2=\frac{1}{4}\left(b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2\right)=D^2$.	1
	ELLER:	
	Om tetraederns topp är i origo, så är ekvationen för bottenplanet $T:\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$,	1
	av vilket vi genom att multiplicera ledvis med uttrycket abc får ekvationen $bcx+acy+abz=abc$.	1
	Avståndet från origo till planet T = tetraederns höjd är $h=\dfrac{\lvert a\cdot 0+b\cdot 0+c\cdot 0-abc\rvert}{\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}}=\dfrac{abc}{\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}}$	1
	Eftersom volymen av tetraedern är $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot ab\cdot c=\frac{1}{6}abc$, får vi ekvationen $\frac{1}{3}D\dfrac{abc}{\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}}=\frac{1}{6}abc$,	1
	av vilket $D=\frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}$.	1
	Eftersom areorna av trianglarna i axelplanen är $A=\frac{1}{2}bc,\ B=\frac{1}{2}ac$ och $C=\frac{1}{2}ab$, är $A^2+B^2+C^2=\frac{1}{4}\left(b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2\right)=D^2$.	1
	ELLER:	
	Vi bildar de vektorer som förenar tetraederns hörn $\overrightarrow{XY}=\bar{u}=-a\bar{i}+b\bar{j}$ och $\overrightarrow{XZ}=\bar{v}=-a\bar{i}+c\bar{k}$. (Figur 2)	1
	Då är $\bar{u}\times\bar{v}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -a & b & 0\\ -a & 0 & c\end{vmatrix}=bc\bar{i}+ac\bar{j}+ab\bar{k}$.	2
	Arean av triangeln XYZ är $D=\frac{1}{2}\lvert\bar{u}\times\bar{v}\rvert=\frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}$.	2
	Eftersom areorna av trianglarna i axelplanen är $A=\frac{1}{2}bc,\ B=\frac{1}{2}ac$ och $C=\frac{1}{2}ab$, är $A^2+B^2+C^2=\frac{1}{4}\left(b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2\right)=D^2$.	1



figur 1



figur 2