MATEMATIIKAN KOE, LYHYT OPPIMÄÄRÄ 28.9.2016
HYVÄN VASTAUKSEN PIIRTEITÄ

Tutkintoaineen sensorikokous on hyväksynyt seuraavat hyvän vastauksen piirteet.

Hyvästä suorituksesta näkyy, miten vastaukseen on päädytty. Ratkaisussa on oltava tarvittavat laskut tai muut riittävät perustelut sekä lopputulos. Arvioinnissa kiinnitetään huomiota kokonaisuuteen, ja ratkaisu pyritään arvioimaan kolmiosaisesti: alku, välivaiheet ja lopputulos. Laskuvirheet, jotka eivät olennaisesti muuta tehtävän luonnetta, eivät alenna pistemäärää merkittävästi. Sen sijaan tehtävän luonnetta muuttavat lasku- ja mallinnusvirheet saattavat alentaa pistemäärää huomattavasti.

Laskin on kokeen apuväline, jonka rooli arvioidaan tehtäväkohtaisesti. Jos ratkaisussa on käytetty symbolista laskintaa, sen on käytävä ilmi suorituksesta. Analysointia vaativien tehtävien ratkaisemisessa pelkkä laskimella saatu vastaus ei riitä ilman muita perusteluja. Sen sijaan laskimesta saatu tulos yleensä riittää rutiinitehtävissä ja laajempien tehtävien rutiiniosissa. Tällaisia ovat esimerkiksi lausekkeiden muokkaaminen, yhtälöiden ratkaiseminen sekä funktioiden derivointi ja integrointi.

A-osa

Merkki • tarkoittaa, että kohdat ovat riippumattomia, eli jälkimmäisen pisteen voi saada ilman edellistä.

1.

• Sijoitettu 1 funktion f lausekkeeseen. • Sievennetty $1^3 = 1$, $1^2 = 1$ $1 - 2 + 1 + 7 = 7$	1 1 1
Vähintään kaksi termiä oikein derivointu $3x^2 - 4x + 1$ $= 12 - 8 + 1 = 5$	1 1 1
Derivaattafunktion ei tarvitse näkyä, $f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 1 = 5$. Sijoitus väärin laskettuun derivaattaan tai funktioon ei tuota lisäpisteitä.	3

2.

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ TAI lavennus 2^3:lla $\frac{7}{8}$	1 1
• Vastaus $x = -\frac{4}{3}$ • Perustelu $2x + 4 = -x$	1 1
• Vastaus $x = 5$ • Perustelu $2^{2(x+1)} = 2^{3(x-1)}$	1 1
Oikean vastauksen voi saada epäilyttävällä päättelyllä $5(2x + 4) = 5(-x)$. Hyvä alku myös virheellinen yritys muuttaa kantaluvut samoiksi.	

3. (1 piste/kohta)

	Kaava		Väite	Kaava nro
1	$b = 2a$	A	Luku b on 50 % suurempi kuin luku a.	3
2	$b = 0{,}5a$	B	Luku a on neljäsosa luvusta b.	5
3	$b = 1{,}5a$	C	Luku b on puolet luvusta a.	2
4	$b = \frac{1}{4}a$	D	Luku b on 25 % suurempi kuin luku a.	6
5	$b = 4a$	E	Luku b on kaksinkertainen lukuun a verrattuna.	1
6	$b = \frac{5}{4}a$	F	Luku a on nelinkertainen lukuun b verrattuna.	4

4.

Ratkaisukaavassa diskriminantti tai $+\frac{5}{4}$ -termi oikein. Sijoitus $\frac{1}{2}(\frac{5}{2} \pm \sqrt{(\frac{5}{2})^2 - 4})$ Juuret $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ ja 2	1 1 1
Pelkkä juuri/juuret ilman päättelyä Vastaus muodossa $x = \ldots$ Vastaus muodossa $\frac{\frac{5}{2} \pm \frac{3}{2}}{2}$	1 -0 -1
Pitää selvittää, missä f saa a-kohdassa löydetyt juuret joko $f(x) = \frac{1}{2}$ eli kuvaajasta $x = -1$ tai $f(x) = 2$ eli kuvaajasta $x = 2$	1 1 1
TAI:	
Luettu kuvasta $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$. Saatu polynomi $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$. Ratkaisukaavalla vastaukset -1 ja 2.	1 1 1
Ensimmäinen piste myös $f(x) = \frac{1}{2}(\frac{5}{2} \pm \sqrt{(\frac{5}{2})^2 - 4})$.	
Jos a-kohdasaa väärät juuret, b-kohdasta	maks. 3

B1-osa

5.	Uusi pituus ja leveys on $1 - 0{,}05 = 0{,}95$ kertaa alkuperäinen.	1
	Uusi leveys 1,9 ja pituus 3,8	1
	Uusi pinta-ala $1{,}9 \cdot 3{,}8 = 7{,}22$	1
	Alkuperäinen pinta-ala $2 \cdot 4 = 8$	1
	Suhde on siis $\frac{7{,}22}{8}$	1
	$= 0{,}9025$, eli piennennystä vajaa 9,8 prosenttia	1
	Laskettu $\frac{8}{7{,}22} = 1{,}108\ldots$ ja 11 prosenttia	maks. 4
	TAI:	
	lineaarinen skaalauskerroin 0,95	1
	pinta-alan skaalauskerroin $0{,}95^2$	4
	$= 0{,}9025$, eli piennennystä vajaa 9,8 prosenttia	1
	Pelkkä $0{,}95^2$ ja 9,8 prosenttia	5

6.	Sylinterinmuotoinen osa: korkeus $h = 97 - 32 = 65$ ja säde $r = \frac{65-4}{2} = 30{,}5$,	1
	joten tilavuus $\pi r^2 h \approx 189960$	1
	Katkaistu kartio: kokeus $h = 32 - 2$, säteet $r_1 = 30{,}5$ ja $r_2 = \frac{45}{2} = 22{,}5$,	1
	joten pohjien alat ovat $A_1 = \pi r_1^2 \approx 2922$ ja $A_2 = \pi r_2^2 \approx 1590$	1
	sen tilavuus on siis $\frac{1}{3}h(A_1 + \sqrt{A_1 A_2} + A_2) \approx 66700$.	1
	Sisäosan tilavuus on siten noin $190 + 66{,}7 = 260$ (litraa).	1

7.	Esimerkki, joka voisi (mahdollisesti lisätiedolla) toimia	1
	Esitetty esimerkki on selvästi riippumattomista tapahtumista.	1
	Mukana perustelu, että esimerkki toteuttaa vaaditun ehdon (lasku tai sanallinen).	1
	Esim: Heitetään sinistä ja punaista noppaa. Todennäköisyys saada sinisellä nopalla ykkönen on riippumaton siitä, saiko punaisella ykkösen.	3
	Pisteytys kuten a-kohdassa	
	Esim: Säkissä on viisi sinistä palloa ja viisi punaista palloa. Nostetaan yksi pallo, ja sitten toinen. Todennäköisyys, että toinen pallo on sininen ei ole riippumaton ensimmäisen pallon väristä.	3
	Ratkaisussa ei tarvitse esittää laskuja. a- ja b-kohdat päinvastaisesti	maks. 4

8.	(Piirros, josta näkyy 10 lyhenevää pomppua)	1
	Piirroksesta tai muuten ilmenee, että ensimmäinen matka (1m) kuljetaan kerran, ja muut kaksi kertaa.	1
	Pomppujen korkeus $0{,}8^n$	1
	Kokonaismatkan antaa geometrinen sarja $1 + 2\sum_{n=1}^{9}(0{,}8)^n$	2
	$= 1 + 2 \cdot 0{,}8\frac{1-(0{,}8)^9}{1-0{,}8} \approx 7{,}9$ (metriä).	1
	TAI:	
	Kun pallo ensimmäisen kerran osuu lattiaan, se on kulkenut metrin.	1
	Ensimmäisellä pompulla se nousee 0,8 metriin ja palaa lattiatasolle, yhteensä 1,6 metriä.	1
	Toisella pompun korkeus on $(0{,}8)^2$ ja matka $2(0{,}8)^2$. Pomppu n on siten pituudeltaan $2(0{,}8)^n$.	1
	Kokonaismatkan antaa geometrinen sarja $1 + 2\sum_{n=1}^{9}(0{,}8)^n$	2
	$= 1 + 2 \cdot 0{,}8\frac{1-(0{,}8)^9}{1-0{,}8} \approx 7{,}9$ (metriä).	1
	Summakaavassa indeksivirhe	-1
	Jätetty huomiotta kaksinkertainen matka (vast 4,5), summakaavassa	-1
	-> esim. $q = 0{,}8$, $S_{10} = a_1\frac{1-q^{10}}{1-q} = 4{,}5$	2
	Kaksinkertaistettu myös ensimmäinen matka (vast 8,9), summakaavassa	-1
	Laskettu taulukolla	maks. 6
	Laskettu viimeisellä pompulla kuljettu matka $(0{,}8^9)$	2

9.	$\lvert AC\rvert = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$	1
	$\lvert AB\rvert = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$	1
	joten $\frac{\lvert AC\rvert}{\lvert AB\rvert} = \sqrt{2}$	1
	D jakaa sivun BC viereisten sivujen suhteessa, eli $\frac{\lvert CD\rvert}{\lvert DB\rvert} = \frac{\lvert AC\rvert}{\lvert AB\rvert} = \sqrt{2}$.	1
	Koska $\lvert CD\rvert = \sqrt{2}\lvert DB\rvert$ ja $\lvert BC\rvert = \lvert CD\rvert + \lvert DB\rvert$ saamme $\lvert DB\rvert = \frac{1}{1+\sqrt{2}}\lvert BC\rvert = \frac{\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$.	1
	BC-suuntainen yksikkövektori on $u = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1{,}2)$, joten $D = B + \frac{\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}u = (2{,}1) + \frac{1}{1+\sqrt{2}}(-1{,}2)$.	1
	Ensimmäisen pisteen saa hyvästä piirroksesta, jossa näkyy pisteet A, B, C ja D.	
	laskettu likiarvoilla	maks. 6

B2-osa

10.

Todennäköisyys, että Saksa voittaa ensimmäisen pelinsä on 0,65, ja todennäköisyys, että Suomi voittaa on 0,5.	1
Tapahtumat ovat riippumattomia, joten todennäköisyys, että kumpikin tapahtuu, saadaan todennäköisyyksien tulolla $0{,}65 \cdot 0{,}5 = 0{,}325$.	1
Pelkkä $0{,}65 \cdot 0{,}5 = 0{,}325$ vastauksena	2
Mahdollisia välieräpareja on kolme sen mukaan onko Suomen vastustaja Saksa, Senegal vai Singapore.	1
Välierässä Suomi–Saksa, on voitto-tn 0.	1
Välierässä Suomi–Singapore, on voitto-tn $0{,}5 \cdot (0{,}65 \cdot 0 + 0{,}35 \cdot 0{,}4) = 0{,}07$.	1
Välierässä Suomi–Senegal, on voitto-tn $0{,}4 \cdot (0{,}55 \cdot 0 + 0{,}45 \cdot 0{,}5) = 0{,}09$, mikä on suurin todennäköisyys voittaa.	1
Termit $0{,}65 \cdot 0$ ja $0{,}55 \cdot 0$ voi jättää pois.	
TAI:	
Riittää tarkastella vaihtoehtoja joissa Suomi ei pelaa Saksaa vastaan.	1
Lueteltu skenaariot (2 kpl), joissa Suomi ei kohtaa Saksaa.	1
Vähintään toinen todennäköisyyksistä 0,07 ja 0,09 oikein.	1
Vastaus: Senegal–Suomi on Suomen kannalta paras välierivastustaja.	1
Jos 0,07 ja 0,09 menevät molemmat pieleen saman pienen virheen takia, voi kahdesta viimeisestä pisteestä saada maks. 1.	

11.

Tehty oletus tulojakaumasta.	1
Oletus ei ole ristiriidassa lehtileikkeen kanssa.	1
Oletus on “normaalityyppinen”, eli painottuu keskituloisiin.	1
Oletus voi olla esimerkiksi: 15 t€: 0,2; 30: 0,45; 60: 0,25; 90: 0,09; 120: 0,01.	
Eri luokkien keskimääräinen veroprosentti arvioitu taulukosta.	1
Esimerkiksi: 15: 0 %; 30: 6 %; 60: 13 %; 90: 17 %; 120: 21 %.	
Kokonaistulo: $15 \cdot 0{,}2 + 30 \cdot 0{,}45 + 60 \cdot 0{,}25 + 90 \cdot 0{,}09 + 120 \cdot 0{,}01 = 40{,}8$ (t€).	
Kokonaisvero: $15 \cdot 0{,}2 \cdot 0 + 30 \cdot 0{,}45 \cdot 0{,}06 + 60 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}13 + 90 \cdot 0{,}09 \cdot 0{,}17 + 120 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}21 = 4{,}389$ (t€).	1
Keskimääräinen veroprosentti on siten $\frac{4{,}389}{40{,}8} \approx 10{,}7$ %, mikä olisi myös vaadittava tasaveroprosentti.	1
Mikä tahansa tulojakauma antaa ensimmäisen pisteen. Yllä oleva oletus on esimerkki ei niin realistisesta jakaumasta. Tehtävässä ei tarkisteta mahdollisesti esiintyviä laskujen yksityiskohtia, ainoastaan suuruusluokkaa (ts. 10-kertaa liian iso tai pieni johtaa pistevähennyksiin). Hyväksyttäviä vastausväli $[6{,}5; 21{,}5]$	

12.

$f'(x) = 3x^2 + 4x$	1
• derivaatta on ylöspäin aukeava parabeli TAI derivaatan kulkukaavio,	1
• joten derivaatta ei ole kasvava kaikkialla.	1
Toista pistettä ei saa funktion kulkukaaviosta, eli derivaatan merkkiä tutkimalla.	
$h(x) = g'(x) = 4x^3 + 2ax$	1
jos $a \geqslant 0$, niin h on kasvava, eli funktio konveksi	1
jos $a < 0$, niin h on vähenevä (origon ympäristössä), eli funktio ei ole konveksi	1
Jälkimmäisiä väitteitä riittää perustella h:n graafeilla eri a:n arvoilla.	

13.	Vuoden sisällä korko määräytyy tilin keskimääräisen saldon mukaan.	1
	Tammikuussa tilillä on 700 euroa.	
	Helmikuussa tilillä on $700 + x$ euroa, missä x on kuukausitalletus.	1
	Maaliskuussa tilillä on $700 + 2x$ euroa, jne.	1
	Keskimäärin tilillä on $\frac{700+(700+x)+(700+2x)+\cdots+(700+11x)}{12} = 700 + \frac{66}{12}x$ euroa.	1
	Korko lähdeverojen jälkeen on siten $(700 + \frac{66}{12}x) \cdot 0{,}006 \cdot 0{,}7$.	1
	Pääoma vuoden lopussa on $700+11x$, josta yhtälö $700+11x+(700+\frac{66}{12}x)\cdot 0{,}0042 =$	
	1800,	1
	josta ratkaisu $x = 99{,}53$ euroa (tai 99,52).	1
	Riippuen talletusajankohdasta, voi helmikuun minimisaldo olla myös 700, jne.	
	Tällöin korkoa tulee vain $\frac{55}{12}x$, jolloin vastaus on 99,56 euroa.	
	Laskettu oikein 700 euron nettokorko (2,94 €).	1