MATEMATIIKAN KOE, PITKÄ OPPIMÄÄRÄ 28.9.2016
HYVÄN VASTAUKSEN PIIRTEITÄ

Tutkintoaineen sensorikokous on hyväksynyt seuraavat hyvän vastauksen piirteet.

Hyvästä suorituksesta näkyy, miten vastaukseen on päädytty. Ratkaisussa on oltava tarvittavat laskut tai muut riittävät perustelut sekä lopputulos. Arvioinnissa kiinnitetään huomiota kokonaisuuteen, ja ratkaisu pyritään arvioimaan kolmiosaisesti: alku, välivaiheet ja lopputulos. Laskuvirheet, jotka eivät olennaisesti muuta tehtävän luonnetta, eivät alenna pistemäärää merkittävästi. Sen sijaan tehtävän luonnetta muuttavat lasku- ja mallinnusvirheet saattavat alentaa pistemäärää huomattavasti.

Laskin on kokeen apuväline, jonka rooli arvioidaan tehtäväkohtaisesti. Jos ratkaisussa on käytetty symbolista laskintaa, sen on käytävä ilmi suorituksesta. Analysointia vaativien tehtävien ratkaisemisessa pelkkä laskimella saatu vastaus ei riitä ilman muita perusteluja. Sen sijaan laskimesta saatu tulos yleensä riittää rutiinitehtävissä ja laajempien tehtävien rutiiniosissa. Tällaisia ovat esimerkiksi lausekkeiden muokkaaminen, yhtälöiden ratkaiseminen sekä funktioiden derivointi ja integrointi.

A-osa

1. (1 piste/kohta)

	Kaava		Väite	Kaava nro
1	$b = 2a$	A	Luku b on 50 % suurempi kuin luku a.	3
2	$b = 0{,}5a$	B	Luku a on neljäsosa luvusta b.	5
3	$b = 1{,}5a$	C	Luku b on puolet luvusta a.	2
4	$b = \frac{1}{4}a$	D	Luku b on 25 % suurempi kuin luku a.	6
5	$b = 4a$	E	Luku b on kaksinkertainen lukuun a verrattuna.	1
6	$b = \frac{5}{4}a$	F	Luku a on nelinkertainen lukuun b verrattuna.	4

2.a)	Neliöjuuren sisällä tai erikseen huomattu tehty $\sqrt{a^2} = a$	1
	Toistettu kolmesti, vastauksena a	1
	Vastaus $\pm a$	-1
	$\sqrt{a^4} = a^2$	0
b)	$f'(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{x^2}$,	1
	joten $f'(2) = \frac{1}{2} - \frac{2}{4} = 0$.	1
	Derivointi myös osamääränä tai negatiivista eksponenttia käyttäen.	
	Derivointivirhe, kaksi termiä ja sijoitus oikein.	1
c)	Löydetty integraalifunktiot –cos(x) ja sin(x).	1
	Saatu vastaus 2.	1
	Merkkivirhe integroinnissa.	maks.1
	Sijoitus funktioon $\sin x + \cos x$	0
	Integroimisvakio vastauksessa.	-1

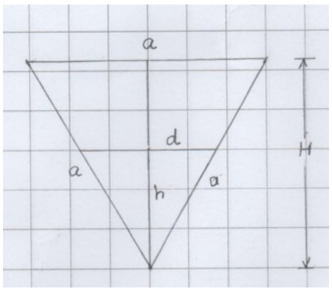
3. a)	$\mathrm{lb}(x+1)-\mathrm{lb}(4x)=\mathrm{lb}\dfrac{x+1}{4x}=1$ ("=1" ei vaadita),	1
	josta $\frac{x+1}{4x}=2^1$	1
	$x+1=8x \Leftrightarrow 7x=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{7}$	1
b)	lb 4 = 2	1
	lb 8 = 3	1
	niin kelvollisia ovat arvot $n=4,5,6,7,8$.	1
	Vastaus voidaan antaa myös muodossa $4 \leq n \leq 8$ tai vastaava.	
	TAI:	
	$2 \leq lb\, n \Rightarrow n \geq 4$	1
	$lb\, n \leq 3 \Rightarrow 8 \geq n$	1
	joten $n=4,5,6,7,8$.	1
	Aidosti kasvavuus tai monotonisuus mainitsematta.	-0
	Määrittelyehto $x>0$ puuttuu.	-0

4.	Suorakulmion sivut ovat x ja $4-x^2$.	1
	Pinta-ala $A(x)=x(4-x^2)=4x-x^3$, $(0 \leq x \leq 2)$.	1
	Derivaatta $A'(x)=4-3x^2$,	1
	jonka nollakohdat ovat $x=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$. Vain positiivinen arvo riittää.	1
	Koska $A(x)$ on suljetulla välillä $[0,2]$ määritelty derivoituva funktio ja $A(0)=A(2)=0$ **TAI** kulkukaaviosta,	1
	niin suurin $A=A\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=\frac{16}{9}\sqrt{3}$ $\left(=\frac{16}{3\sqrt{3}}\right)$.	1
	Käsitelty pinta-alana vain funktiota $4-x^2$.	+0
	Vastaus summamuodossa.	-1
	Derivointivirhe, nollakohta välillä (0,2)	maks. 4

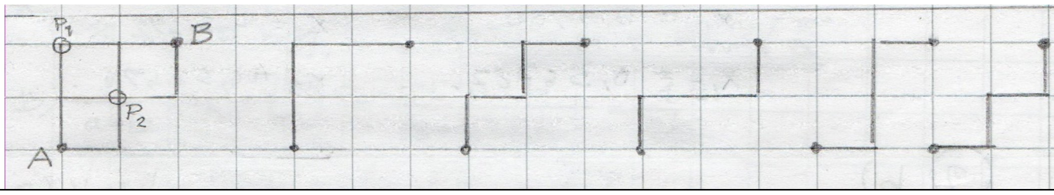
B1-osa

5. a)	Merkitään kulmia $a, a+d$ ja $a+2d$. Kulmien summa on $3a+3d=180^\circ$, josta $a+d=60^\circ$.	1
	Suurin kulma on $a+2d=103^\circ$. (Ei tarvitse perustella) Saadaan yhtälöpari $\begin{cases} a+2d=103^\circ \\ a+d=60^\circ \end{cases}$,	1
	josta $a = 17°$ ja $d = 43°$. Kulmien suuruudet $17^\circ, 60^\circ$ ja 103°.	1
	TAI:	
	Merkitään kulmia $a-d, a$ ja $a+d$.	1
	Kulmien summa on $3a=180^\circ$, josta $a=60^\circ$.	1
	Suurin kulmista on $a+d=103^\circ$, joten $d=43^\circ$. Kulmien suuruudet ovat siten $17^\circ, 60^\circ$ ja 103°.	1
	TAI:	
	$103° + 103° - d + 103° - 2d = 180°$ tai vastaava.	3
	Pelkkä kuva, jossa yksi kulma on 103°.	0
	Pelkkä vastaus.	1
b)	Merkitään kulmia x, qx ja q^2x, joista pienin on $x=\frac{\pi}{7}$.	1
	Kulmien summa on $\frac{\pi}{7}(1+q+q^2)=\pi$, josta saadaan ehto $q^2+q-6=0 \Leftrightarrow q=2 \vee q=-3$ (ei kelpaa).	1
	Kulmien suuruudet ovat siten $\frac{\pi}{7}, \frac{2\pi}{7}$ ja $\frac{4\pi}{7}$.	1
	Jos annettu kulma keskimmäinen ja kulmat ovat $\frac{x}{q}, x$ ja qx, joista $x=\frac{\pi}{7}$, niin $q = 3 \pm 2\sqrt{2}$ ja kulmat $\frac{(3-2\sqrt{2})\pi}{7}, \frac{\pi}{7}, \frac{(3+2\sqrt{2})\pi}{7}$.	1+1+1
	Toinen ratkaisuista riittää, b-kohdasta voi saada 3 pistettä joko yhdellä täysin oikealla ratkaisulla tai kahdella ratkaisulla, joissa ensimmäiset kaksi *askelta oikein.*	
	Pelkkä vastaus	1

6. a)	Kaukalo on suora särmiö. Jos päätykolmion pinta-ala on A, niin kaukalon tilavuus $V_k = Ab$.	1
	Jäljelle jäänyt vesi muodostaa kolmisivuisen pyramidin, jonka tilavuus $V_v = \frac{1}{3}Ab$. Poistuneen veden tilavuus on siten $V = \frac{2}{3}Ab = \frac{2}{3}V_k$.	1
	Vettä on valunut pois $\frac{2}{3}$ koko määrästä, eli $\frac{200}{3}\,\% = 66\frac{2}{3}\,\% \approx 67\,\%$.	1
b)	Päätykolmion korkeus $H = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ ja pinta-ala $A_1 = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.	1
	Päätykolmioiden pinta-aloja vertaamalla $\dfrac{d^2}{a^2} = \dfrac{1}{3}$ tai yhtälöstä $\frac{1}{3}A_1 b = \frac{\sqrt{3}}{4}d^2 b$ saadaan $d = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$ (kuvio alla).	1
	Veden korkeus on siten $\dfrac{d\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot 2} = \dfrac{a}{2}$	1
	Likiarvot ok, jos vastaus 0,5a tai a/2, muuten maks. 2.	
	Käytetty lukuarvoja a:lle tai b:lle.	maks. 4
	a-kohta väärin b-kohdassa.	maks. 3



7. a)	Etäisyysehto antaa yhtälön $\sqrt{x^2+y^2}=\lvert 2-y\rvert$ (jo hyvä kuva antaa ensimmäisen pisteen),	1+1
	josta $x^2+y^2=4-4y+y^2$,	1
	joten $y=-\frac{1}{4}x^2+1$ (viimeiset kaksi askelta myös laskimella). HUOM: ”y=” tai ”f(x)=” vaaditaan.	1
	TAI:	
	Havaittu paraabeliksi ja kolmen pisteen ja yhtälöryhmän avulla saatu funktion lauseke.	4
	Itseisarvomerkit puuttuvat.	-0
b)	Käyrä leikkaa x-akselin, kun $y=0$. Tällöin $-\frac{1}{4}x^2+1=0$, josta $x^2=4\Leftrightarrow x=\pm 2$.	1
	Koska alue jää x-akselin yläpuolelle (ja on symmetrinen y-akselin suhteen), on kysytty pinta-ala $2\int_0^2(-\frac{1}{4}x^2+1)dx=$ $2\Big/_0^2\left(-\frac{1}{12}x^3+x\right)=2\left(-\frac{2}{3}+2\right)=\frac{8}{3}$.	1
	Määrätyn integraalin arvo laskimesta.	-0
	a-kohta väärin, mutta alaspäin aukeava paraabeli, b-kohta maks. 2.	

8. a)	Eri reitit: 	1
	Reittien todennäköisyydet vasemmalta: $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{8}$, $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{8}$, $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{4}$,	2
	Yksi tai kaksi todennäköisyyttä väärin.	-1
	Vähintään yksi reitti ja sen todennäköisyys oikein	1
	Neljä reittiä todennäköisyyksineen oikein	2
b)	(Mahdolliset kohtauspaikat ovat pisteet P_1 ja P_2.)	1
	Tn kohdata pisteessä P_1 on $p_1=(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2})(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2})$. Tn kohdata pisteessä P_2 on $p_2=(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 1)(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 1)$. **TAI** $p_1=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}$ ja $p_2=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}$	1
	Kysytty todennäköisyys on $p_1+p_2=\frac{1}{16}+\frac{9}{16}=\frac{5}{8}$.	1
	Laskettu käyttäen vain toista kohtauspaikkaa.	maks.1
	a-kohta väärin, mutta todennäköisyyksien summa 1, b-kohdasta maks. 3.	

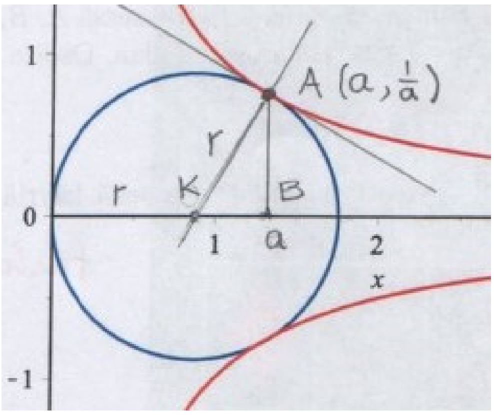
9.1.	Tekijöihin jako: $n^3+6n^2-7n=n(n^2+6n-7)=(n-1)n(n+7)$ **TAI** $6n^2$ ei vaikuta jaollisuuteen.	1
	Peräkkäisistä luvuista $n-1$ ja n toinen on varmasti parillinen, joten luvussa on tekijänä luku 2.	1
	Jos toinen tekijöistä $n-1$ ja n on kolmella jaollinen, niin luvussa on tekijänä myös luku 3.	1
	Jos näin ei ole, niin silloin varmasti luku $n+1$ on kolmella jaollinen,	1
	kuten on myös luku $(n+1)+6=n+7$.	1
	Koska alkuperäinen luku on jaollinen luvuilla 2 ja 3, on se jaollinen myös luvulla $2\cdot 3=6$.	1
	TAI:	
	Tekijöihin jako: $n^3+6n^2-7n=n(n^2+6n-7)=(n-1)n(n+7)$.	1
	Peräkkäisistä luvuista $n-1$ ja n toinen on varmasti parillinen, joten luvussa on tekijänä luku 2.	1
	Koska $n\equiv n$ (mod 3), $n+7\equiv n+1$ (mod 3) (ja $n-1\equiv n+2$ (mod 3)),	2
	niin $n-1, n$ ja $n+7$ ovat keskenään eri luokkaa (mod 3). Siis jokin niistä on $\equiv 0$ (mod 3) eli kolmella jaollinen.	1
	Koska alkuperäinen luku on jaollinen luvuilla 2 ja 3, on se jaollinen myös luvulla $2\cdot 3=6$.	1
	TAI:	
	Huomattu parilliseksi ja tutkittu $3q$, $3q+1$ ja $3q+2$.	3
	TAI:	
	Tutkittu $6q$, $6q+1$, …,$6q+5$	
	Tekijöihin jako ja sijoitukset laskimella ok.	

9.2. a)	(Laskettu $2^7 - 60 \cdot 2 - 8 = 0$)	1
	$\frac{x^7-60x-8}{x^2-4} = \frac{x^6+2x^5+4x^4+8x^3+16x^2+32x+4}{x+2}$ (osoittajan tekijäjako riittää)	1
	josta havaittu, että sijoitus ei johda muotoon $\frac{0}{0}$.	1
	TAI:	
	l'Hôspitalin säännöllä perustellen.	3
	Pelkkä laskinvastaus raja-arvotoiminnolla.	0
	Tekijöihin jako tai vastaava laskimella ok.	
b)	Koska $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$, niin äärellinen raja-arvo voi olla olemassa vain, jos $x-2$ on myös osoittajan tekijä, eli luku 2 on sen nollakohta.	1
	Saadaan ehto $2^n - 128 = 0$,	1
	josta $2^n = 2^7$, eli $n = 7$. (Raja-arvo on siten olemassa vain arvolla $n = 7$.)	1
	Kokeilu lukuarvoilla.	0

B2-osa

10.a)	Aloitetaan $x = 2 + \ln x$ iterointi: $x_0 = 1$, $x_1 = 2 + \ln 1 = 2$,	1
	$x_2 = 2 + \ln 2 = 2{,}6931...$, $x_3 = 2 + \ln 2{,}6931... = 2{,}9907...$, $x_4 = 3{,}0955...$, $x_5 = 3{,}1299...$, $x_6 = 3{,}1410...$, $x_7 = 3{,}1445...$, $x_8 = 3{,}1456...$, $x_9 = 3{,}1460...$, $x_{10} = 3{,}1461...$ (3.146140339) x_{10} esitetty riittävän monella desimaalilla pyöristyksen perusteluksi.	1
	Vastaus on $x_{10} \approx 3{,}146$.	1
b)	$x = 2 + \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = x - 2 \Leftrightarrow x = e^{x-2}$	1
	Iterointi: $x_0 = 1$ $x_1 = 0{,}3678...$ $x_2 = 01955...$ $x_3 = 0{,}1645...$ $x_4 = 0{,}1595...$ $x_5 = 0{,}1587...$ $x_6 = 0{,}1586...$ $x_7 = 0{,}1585...$ $x_8 = x_9 = x_{10} = 0{,}1585...$ (0.1585943547) x_{10} esitetty riittävän monella desimaalilla pyöristyksen perusteluksi.	1
	Vastaus on $x_{10} \approx 0{,}159$.	1
	Tarkkuusvirhe	-1-1
	Iterointi kesken, lopetettu esim. kierrokseen x_8.	-1-1
	Pyöristys ei näy	-1
	iterointikierrokset x_2, …, x_9, puuttuu.	-0
	Pelkät vastaukset.	0

11.	Kuva jossa käyrän normaali kulkee ympyrän keskipisteen läpi **TAI** Alla olevassa kuviossa ympyrän säde on r sekä käyrän $y=\frac{1}{x}$ ja ympyrän sivuamispiste $A(a,\frac{1}{a})$. Koska $y'(x)=-\frac{1}{x^2}$, niin pisteeseen A asetetun tangentin kulmakerroin on $-\frac{1}{a^2}$.	1
	Samaan pisteeseen asetetun normaalin kulmakerroin on siten a^2.	1
	Koska normaali kulkee myös ympyrän keskipisteen $K(r,0)$ kautta, voidaan sen kulmakerroin esittää muodossa $\frac{\frac{1}{a}}{a-r}$. Saadaan yhtälö $a^2=\frac{\frac{1}{a}}{a-r}$ eli $a^3(a-r)=1$ (1).	1
	Toisaalta suorakulmaisesta kolmiosta KBA saadaan Pythagoraan mukaan yhtälö $(a-r)^2+\left(\frac{1}{a}\right)^2=r^2$ (2).	1
	Muodostetaan yhtälöistä (1) ja (2) pari $\begin{cases} a^3(a-r)=1 \\ (a-r)^2+\left(\frac{1}{a}\right)^2=r^2 \end{cases}$. Ylemmästä yhtälöstä saadaan $a-r=\frac{1}{a^3}$, josta $r=a-\frac{1}{a^3}$.	
	Sijoittamalla nämä molemmat alempaan yhtälöön, saadaan $\frac{1}{a^6}+\frac{1}{a^2}=a^2-\frac{2}{a^2}+\frac{1}{a^6}$ ja edelleen $a^4=3$, josta $a=\pm\sqrt[4]{3}$, joista vain positiivinen arvo kelpaa.	1
	Lopulta saadaan $r=a-\frac{1}{a^3}=\frac{a^4-1}{a^3}=\frac{3-1}{\sqrt[4]{27}}=\frac{2}{\sqrt[4]{27}}$ $(=0{,}8773\ldots\approx 0{,}88)$.	1
	Laskimen normaali- ja muita toimintoja voidaan hyödyntää osana ratkaisua. Yhtälöryhmän voi ratkaista laskimella.	



12. a)	$\overline{N}\cdot\left(\overline{r}-\overline{r_0}\right)=\left(3\overline{i}-2\overline{j}+5\overline{k}\right)\cdot\left((x-1)\overline{i}+(y-2)\overline{j}+(z-3)\overline{k}\right)=$	1
	$3(x-1)-2(y-2)+5(z-3)=3x-3-2y+4+5z-15=0 \Leftrightarrow$ $3x-2y+5z=14$. (Vakiot ovat siten $a=3, b=-2, c=5$ ja $d=14$.)	1
b)	Saatu yhtälö toteutuu arvoilla $x=1,\ y=2$ ja $z=3$, koska $3-4+15=14$, joten piste on tasolla.	2
c)	Yhtälön $2x-5y+7z=14$ toteuttaa esim. piste $(7,0,0)$. Voidaan siis valita $\overline{r_0}=7\overline{i}$. Tällöin $\overline{r}-\overline{r_0}=(x-7)\overline{i}+y\overline{j}+z\overline{k}$. (Myös esim. vektori $\overline{r_0}=2\overline{k}$ kelpaa.)	1
	Jos $\overrightarrow{N}=a\overline{i}+b\overline{j}+c\overline{k}$, niin $\overrightarrow{N}\cdot(\overline{r}-\overline{r_0})=0 \Leftrightarrow a(x-7)+by+cz=0$ $\Leftrightarrow ax+by+cz=7a$, joka on sama kuin $2x-5y+7z=14$, kun $a=2, b=-5$ ja $c=7$, jolloin $\overrightarrow{N}=2\overline{i}-5\overline{j}+7\overline{k}$.	1
	Jos ratkaisee vektorin $\vec{N}$ väärällä r_0	maks.1
	Voi tehdä myös esimerkiksi valitsemalla ensin vektorin $\vec{N}$.	
	Laskimen dotp ja muita toimintoja voi käyttää osana ratkaisua.	
	Yksittäinen laskuvirhe	-1

13. a)	Luku $x=\frac{2}{3}$ on yhtälön $x-\frac{2}{3}=0$ eli myös yhtälön $3x-2=0$ juuri. Polynomi on siten $P_a(x)=3x-2$.	1
b)	Neliöimällä yhtälö $x=\sqrt{3}$ saadaan $x^2=3$. Polynomiksi kelpaa siten $P_b(x)=x^2-3$.	1
c)	Jos $x=2+\sqrt{3}$, niin $x-2=\sqrt{3}$, josta neliöimällä saadaan $(x-2)^2=3 \Leftrightarrow x^2-4x+1=0$. Polynomiksi käy siten $P_c(x)=x^2-4x+1$.	1
d)	Jos $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$, niin $x^2=5+2\sqrt{6}$,	1
	josta $x^2-5=2\sqrt{6}$. Neliöimällä uudelleen saadaan $(x^2-5)^2=24$,	1
	joten polynomi on $P_d(x)=x^4-10x^2+1$.	1
	Jokaiseen kohtaan on useita ratkaisuja.	
	Voi ratkaista esimerkiksi käyttämällä nollakohtien ja tekijäesityksen välistä yhteyttä sekä neliöiden erotusta.	