MATEMATIKPROV, KORT LÄROKURS 28.9.2016
BESKRIVNING AV GODA SVAR

Examensämnets censorsmöte har godkänt följande beskrivningar av goda svar.

Av en god prestation framgår det hur examinanden har kommit fram till svaret. I lösningen måste det ingå nödvändiga uträkningar eller andra tillräckliga motiveringar och ett slutresultat. I bedömningen fästs uppmärksamhet vid helheten och vid de tre stegen start, mellansteg och slutresultat. Räknefel som inte väsentligt ändrar uppgiftens natur ger ingen betydande sänkning av antalet poäng. Räknefel och fel i den matematiska modellen som ändrar uppgiftens natur kan däremot sänka antalet poäng avsevärt.

I provet är räknaren ett hjälpmedel, och dess roll bedöms separat för varje uppgift. Om symbolräknare använts i en uppgift ska det framgå av prestationen. I lösningar av uppgifter som kräver analys räcker det inte enbart med ett svar som erhållits med hjälp av räknaren utan övriga motiveringar. Däremot räcker ett svar som examinanden fått med räknaren i allmänhet i rutinberäkningar. Detsamma gäller rutinmässiga delar av mera omfattande uppgifter. Exempel på sådana är omskrivning av uttryck, ekvationslösning samt derivering och integrering av funktioner.

Del A

Markeringen • innebär att momenten är oberoende av varandra, dvs. skribenten kan få poäng för andra momentet även om det första ger noll poäng.

1.

• 1 insatt i uttrycket för funktionen f	1
• förenklat $1^3 = 1$, $1^2 = 1$	1
$1 - 2 + 1 + 7 = 7$	1
Minst två termer rätt deriverade	1
$3x^2 - 4x + 1$	1
$= 12 - 8 + 1 = 5$	1
Derivatafunktionen behöver inte vara utskriven, $f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 1 = 5$.	3
Insättning i felberäknad derivata eller funktion ger inte tilläggspoäng.	

2.

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ ELLER förlängning med 2^3	1
$\frac{7}{8}$	1
• Svar $x = -\frac{4}{3}$	1
• Motivering $2x + 4 = -x$	1
• Svar $x = 5$	1
• Motivering $2^{2(x+1)} = 2^{3(x-1)}$	1
Rätt svar kan fås också genom tveksam slutledning $5(2x + 4) = 5(-x)$.	
God inledning också felaktigt försök att göra baserna lika.	

3. (1 poäng/fall)

	Formel		Påstående	Formel nr
1	$b = 2a$	A	Talet b är 50 % större än talet a.	3
2	$b = 0{,}5a$	B	Talet a är en fjärdedel av talet b.	5
3	$b = 1{,}5a$	C	Talet b är hälften av talet a.	2
4	$b = \frac{1}{4}a$	D	Talet b är 25 % större än talet a.	6
5	$b = 4a$	E	Talet b är dubbelt så stort som talet a.	1
6	$b = \frac{5}{4}a$	F	Talet a är fyra gånger så stort som talet b.	4

4.

Diskriminanten eller termen $+\frac{5}{4}$ korrekt i lösningsformeln.	1
Insättning $\frac{1}{2}(\frac{5}{2} \pm \sqrt{(\frac{5}{2})^2 - 4})$	1
Rötterna $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ och 2	1
Bara roten/rötterna utan slutledning	1
Svar i formen $x = \ldots$	-0
Svar i formen $\frac{\frac{5}{2} \pm \frac{3}{2}}{2}$	-1
Vi måste undersöka var f får a-delens rötter	1
antingen är $f(x) = \frac{1}{2}$ så, från grafen, $x = -1$	1
eller $f(x) = 2$, från grafen, $x = 2$	1
ELLER:	
Avläst från grafen $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$.	1
Fått polynomet $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$.	1
Svaren -1 och 2 med lösningsformeln.	1
Första poänget också för $f(x) = \frac{1}{2}(\frac{5}{2} \pm \sqrt{(\frac{5}{2})^2 - 4})$.	
Ifall fel rötter från a-delen, för b-delen	max 3

Del B1

5.

Ny längd och bredd är $1 - 0{,}05 = 0{,}95$ gånger den ursprungliga.	1
Ny bredd 1,9 och längd 3,8	1
Ny area $1{,}9 \cdot 3{,}8 = 7{,}22$	1
Ursprunglig area $2 \cdot 4 = 8$	1
Förhållandet är alltså $\frac{7.22}{8}$	1
$= 0{,}9025$, dvs. knappt 9,8 procents minskning	1
Beräknat $\frac{8}{7{,}22} = 1{,}108\ldots$ och 11 %	max 4
ELLER:	
lineär skalfaktor 0,95	1
skalfaktor för arean $0{,}95^2$	4
$= 0{,}9025$, dvs. knappt 9,8 procents minskning	1
Bara $0{,}95^2$ och 9,8 procent	5

6.

Den cylinderformade delen: höjd $h = 97 - 32 = 65$ och radie $r = \frac{65-4}{2} = 30{,}5$	1
alltså volym $\pi r^2 h \approx 189960$	1
Stympad kon: höjd $h = 32 - 2$, radier $r_1 = 30{,}5$ och $r_2 = \frac{45}{2} = 22{,}5$	1
alltså är bottenytornas areor $A_1 = \pi r_1^2 \approx 2922$ och $A_2 = \pi r_2^2 \approx 1590$	1
volymen är alltså $\frac{1}{3}h(A_1 + \sqrt{A_1 A_2} + A_2) \approx 66700$.	1
Innerdelens volym är ca $190 + 66{,}7 = 260$ (liter).	1

7.

Exempel som (eventuellt med tilläggsinformation) kunde fungera	1
Det givna exemplet gäller händelser som tydligt är oberoende av varandra. Inkluderad redogörelse för att exemplet uppfyller det uppställda villkoret (beräkning eller verbal).	1
T.ex. man kastar en blå och en röd tärning. Sannolikheten att få en etta med den blå tärningen är oberoende av om den röda tärningen blev en etta.	3
Poäng som i moment a	
T.ex. Det finns fem blå och fem röda bollar i en säck. Man lyfter ut först en boll, sedan en annan. Sannolikheten för att den andra bollen är blå är inte oberoende av den första bollens färg.	3
Beräkningar behövs inte. Moment a och b tvärtom	max 4

8.	(Ritning som visar 10 studsar som successivt blir lägre)	1
	Av ritningen eller på annat sätt framgår att bollen färdas den första sträckan en gång och de följande två gånger.	1
	Höjden på studsarna $0{,}8^n$	1
	Den totala sträckan ges av den geometriska serien $1 + 2\sum_{n=1}^{9}(0{,}8)^n$	1
	$= 1 + 2 \cdot 0{,}8\frac{1-(0{,}8)^9}{1-0{,}8} \approx 7{,}9$ (meter).	1
	ELLER:	
	Då bollen första gången rör vid golvet har den färdats en meter.	1
	Efter första studsen stiger den till 0,8 meter och återvänder till golvnivå, totalt 1,6 meter.	1
	Efter den andra studsen når den höjden $(0{,}8)^2$ och sträckan den färdas blir $2(0{,}8)^2$, vilket betyder att efter studs n färdas den $2(0{,}8)^n$.	1
	Den totala sträckan får vi genom en geometrisk serie $1 + 2\sum_{n=1}^{9}(0{,}8)^n$	2
	$= 1 + 2 \cdot 0{,}8\frac{1-(0{,}8)^9}{1-0{,}8} \approx 7{,}9$ (meter).	1
	Indexfel i summaformeln	-1
	Den dubbla sträckan har inte beaktats i summaformeln (svar 4,5)	-1
	-> t.ex. $q = 0{,}8$, $S_{10} = a_1\frac{1-q^{10}}{1-q} = 4{,}5$	2
	Även den första sträckan dubblad i summaformeln (svar 8,9)	-1
	Beräkning utifrån tabell	max 6
	Beräknat sträckan efter sista studsen $(0{,}8^9)$	2

9.	$\|AC\| = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$	1
	$\|AB\| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$	1
	alltså är $\frac{\|AC\|}{\|AB\|} = \sqrt{2}$	1
	D delar sidan BC i förhållande till de närliggande sidorna, dvs. $\frac{\|CD\|}{\|DB\|} = \frac{\|AC\|}{\|AB\|} = \sqrt{2}$.	1
	Eftersom $\|CD\| = \sqrt{2}\|DB\|$ och $\|BC\| = \|CD\| + \|DB\|$ får vi $\|DB\| = \frac{1}{1+\sqrt{2}}\|BC\| = \frac{\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$.	1
	$u = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1{,}2)$ är en BC-riktnings enhetsvektor, alltså är $D = B + \frac{\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}u = (2{,}1) + \frac{1}{1+\sqrt{2}}(-1{,}2)$.	1
	Första poänget kan man få för välgjord ritning där punkterna A, B, C och D framgår	
	beräknade med närmevärden	max 6

Del B2

10.	Sannolikheten att Tyskland vinner sin första match är 0,65, och sannolikheten för att Finland vinner är 0,5.	1
	Händelserna är oberoende, alltså är sannolikheten att båda inträffar produkten av dessa, $0{,}65 \cdot 0{,}5 = 0{,}325$.	1
	Bara $0{,}65 \cdot 0{,}5 = 0{,}325$ som svar	2
	Det finns tre möjliga semifinalpar beroende på om Finlands motståndare är Tyskland, Senegal eller Singapore.	1
	I en semifinal Finland–Tyskland är sannolikheten för vinst 0.	1
	I en semifinal Finland–Singapore är sannolikheten för vinst $0{,}5 \cdot (0{,}65 \cdot 0 + 0{,}35 \cdot 0{,}4) = 0{,}07$.	1
	I en semifinal Finland–Senegal är sannolikheten för vinst $0{,}4 \cdot (0{,}55 \cdot 0 + 0{,}45 \cdot 0{,}5) = 0{,}09$, vilket är den största sannolikheten för vinst.	1
	Termerna $0{,}65 \cdot 0$ och $0{,}55 \cdot 0$ kan utelämnas.	
	ELLER:	
	Det räcker att granska alternativen där Finland inte spelar mot Tyskland.	1
	Räknas upp de scenarier (2 st.) där Finland inte spelar mot Tyskland.	1
	Minst en av sannolikheterna 0,07 och 0,09 korrekt.	1
	Svar: Finland–Senegal innebär den bästa semifinalmotståndaren ur Finlands synvinkel.	1
	Om 0,07 och 0,09 bägge två blir fel på grund av samma mindre fel, kan man få högst 1 av de två sista poängen.	

11.	Ett antagande om inkomstdistributionen	1
	som inte motsägs av tidningsurklippet.	1
	Antagandet är av "normaltyp", dvs. de flesta är medelinkomstagare.	1
	Antagandet kan vara t.ex. 15 t€: 0,2; 30: 0,45; 60: 0,25; 90: 0,09; 120: 0,01.	
	De olika kategoriernas skatteprocent uppskattas ur tabellen.	1
	T.ex.: 15: 0 %; 30: 6 %; 60: 13 %; 90: 17 %; 120: 21 %.	
	Totala inkomsten: $15 \cdot 0{,}2 + 30 \cdot 0{,}45 + 60 \cdot 0{,}25 + 90 \cdot 0{,}09 + 120 \cdot 0{,}01 = 40{,}8$ (t€).	
	Totala skatten: $15 \cdot 0{,}2 \cdot 0 + 30 \cdot 0{,}45 \cdot 0{,}06 + 60 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}13 + 90 \cdot 0{,}09 \cdot 0{,}17 + 120 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}21 = 4{,}389$ (t€).	1
	Genomsnittliga skatteprocenten är $\frac{4{,}389}{40{,}8} \approx 10{,}7$ %, vilket samtidigt är den nödvändiga plattskatten.	1
	Vilken som helst inkomstdistribution ger det första poänget. Ovanstående antagande är exempel på en distribution som inte är särskilt realistisk. I uppgiften granskas inte detaljer i eventuella beräkningar, bara storleksordningar (dvs. 10 gånger för stor eller liten leder till poängavdrag). Godkänt svarsintervall $[6{,}5; 21{,}5]$	

12.	$f'(x) = 3x^2 + 4x$	1
	• derivatan är en uppåtvänd parabel ELLER teckenschema för derivatan,	1
	• så den är inte överallt stigande.	1
	Det andra poänget får man inte för funktionens teckenschema, dvs. genom att undersöka derivatans tecken.	
	$h(x) = g'(x) = 4x^3 + 2ax$	1
	om $a \geqslant 0$ så är h stigande, dvs. funktionen konvex	1
	om $a < 0$ är h sjunkande (i närheten av origo), dvs. funktionen är inte konvex	1
	Det räcker att visa det senare påståendet med hjälp av h-grafer för olika värden på a.	

13.	Räntan bestäms utifrån medelsaldot på kontot under ett år.	1
	I januari finns det 700 € på kontot.	
	I februari finns det $700 + x$ €, där x är en månatlig deposition.	1
	I mars finns det $700 + 2x$ € osv.	1
	I medeltal finns det $\frac{700+(700+x)+(700+2x)+\cdots+(700+11x)}{12} = 700 + \frac{66}{12}x$ €.	1
	Räntan efter källskatt är därmed $(700 + \frac{66}{12}x) \cdot 0{,}006 \cdot 0{,}7$.	1
	Kapitalet i slutet av året är $700 + 11x$, vilket ger ekvationen $700 + 11x + (700 + \frac{66}{12}x) \cdot 0{,}0042 = 1800$,	1
	detta ger lösningen $x = 99{,}53$ € (eller 99,52).	1
	Beroende på tidpunkten för depositionen kan minimisaldot för februari också vara 700, osv. Då blir räntan bara $\frac{55}{12}x$, vilket ger svaret 99,56 euroa.	
	Korrekt beräknad nettoränta på 700 € (2,94 €).	1