# MATEMATIKPROV, LÅNG LÄROKURS 28.9.2016
# BESKRIVNING AV GODA SVAR

Examensämnets censorsmöte har godkänt följande beskrivningar av goda svar.

Av en god prestation framgår det hur examinanden har kommit fram till svaret. I lösningen måste det ingå nödvändiga uträkningar eller andra tillräckliga motiveringar och ett slutresultat. I bedömningen fästs uppmärksamhet vid helheten och vid de tre stegen start, mellansteg och slutresultat. Räknefel som inte väsentligt ändrar uppgiftens natur ger ingen betydande sänkning av antalet poäng. Räknefel och fel i den matematiska modellen som ändrar uppgiftens natur kan däremot sänka antalet poäng avsevärt.

I provet är räknaren ett hjälpmedel, och dess roll bedöms separat för varje uppgift. Om symbolräknare använts i en uppgift ska det framgå av prestationen. I lösningar av uppgifter som kräver analys räcker det inte enbart med ett svar som erhållits med hjälp av räknaren utan övriga motiveringar. Däremot räcker ett svar som examinanden fått med räknaren i allmänhet i rutinberäkningar. Detsamma gäller rutinmässiga delar av mera omfattande uppgifter. Exempel på sådana är omskrivning av uttryck, ekvationslösning samt derivering och integrering av funktioner.

# Del A

**1.** (1 poäng/fall)

| | Formel | | Påstående | Formel nr |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $b = 2a$ | A | Talet $b$ är 50 % större än talet $a$. | 3 |
| 2 | $b = 0{,}5a$ | B | Talet $a$ är en fjärdedel av talet $b$. | 5 |
| 3 | $b = 1{,}5a$ | C | Talet $b$ är hälften av talet $a$. | 2 |
| 4 | $b = \frac{1}{4}a$ | D | Talet $b$ är 25 % större än talet $a$. | 6 |
| 5 | $b = 4a$ | E | Talet $b$ är dubbelt så stort som talet $a$. | 1 |
| 6 | $b = \frac{5}{4}a$ | F | Talet $a$ är fyra gånger så stort som talet $b$. | 4 |

| | | |
|---|---|---|
| **2. a)** | Innanför kvadratroten eller separat noterat $\sqrt{a^2} = a$ | 1 |
| | Upprepat tre gånger, svaret $a$ | 1 |
| | Svaret $\pm a$ | -1 |
| | $\sqrt{a^4} = a^2$ | 0 |
| **b)** | $f'(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{x^2}$, | 1 |
| | dvs. $f'(2) = \frac{1}{2} - \frac{2}{4} = 0$. | 1 |
| | Derivering även med kvotderivata eller med negativ exponent | |
| | Deriveringsfel, två termer och korrekt insättning | 1 |
| **c)** | Funnit integralfunktionerna –cos(x) och sin(x). | 1 |
| | Rätt svar 2. | 1 |
| | Teckenfel i integreringen. | max 1 |
| | Insättning i funktionen $\sin x + \cos x$ | 0 |
| | Integreringskonstant i svaret. | -1 |

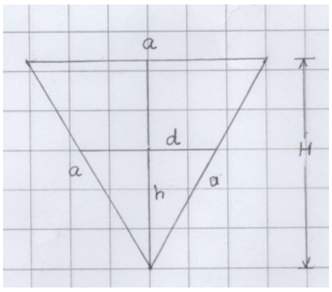
| | | |
|---|---|---|
| **3. a)** | $\text{lb}(x+1)-\text{lb}(4x)=\text{lb}\dfrac{x+1}{4x}=1$, ("=1" krävs inte), | 1 |
| | vilket ger $\frac{x+1}{4x}=2^1$ | 1 |
| | $x+1=8x \Leftrightarrow 7x=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{7}$ | 1 |
| **b)** | lb 4 = 2 | 1 |
| | lb 8 = 3 | 1 |
| | därför duger värdena $n=4,5,6,7,8$. | 1 |
| | Svaret kan även ges i formen $4 \leq n \leq 8$ eller motsvarande. | |
| | **ELLER:** | |
| | $2 \leq lb\, n \Rightarrow n \geq 4$ | 1 |
| | $lb\, n \leq 3 \Rightarrow 8 \geq n$ | 1 |
| | varför $n=4,5,6,7,8$. | 1 |
| | Inte nämnt att funktionen är strängt växande eller monoton. | -0 |
| | Definitionsvillkor $x>0$ saknas. | -0 |

| | | |
|---|---|---|
| **4.** | Rektangelns sidor är $x$ och $4-x^2$. | 1 |
| | Arean $A(x)=x(4-x^2)=4x-x^3$, $0 \leq x \leq 2$. | 1 |
| | Derivatan $A'(x)=4-3x^2$, | 1 |
| | vars nollställen är $x=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$. Av dessa duger endast det positiva värdet. | 1 |
| | Eftersom $A(x)$ i det slutna intervallet $[0,2]$ är en definierad kontinuerlig funktion och $A(0)=A(2)=0$, **ELLER** med teckenschema | 1 |
| | är det största värdet $A=A\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=\frac{16}{9}\sqrt{3}$ $\left(=\frac{16}{3\sqrt{3}}\right)$. | 1 |
| | Som area behandlat endast funktionen $4-x^2$. | +0 |
| | Svaret i form av en summa. | -1 |
| | Deriveringsfel, nollställe i intervallet (0,2) | max 4 |

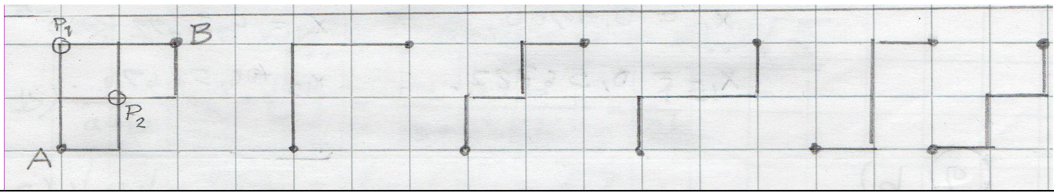
# Del B1

| | | |
|---|---|---|
| **5. a)** | Vi betecknar vinklarna $a, a+d$ och $a+2d$. Vinklarnas summa är $3a+3d=180^\circ$, vilket ger $a+d=60^\circ$. | 1 |
| | Största vinkeln är $a+2d=103^\circ$. (Behöver inte motiveras) Vi får ekvationsparet $\begin{cases} a+2d=103^\circ \\ a+d=60^\circ \end{cases}$, | 1 |
| | vilket ger $a=17^\circ$ och $d=43^\circ$. Vinklarnas storlek $17^\circ, 60^\circ$ och $103^\circ$. | 1 |
| | **ELLER:** | |
| | Vi betecknar vinklarna $a-d, a$ och $a+d$. | 1 |
| | Vinklarnas summa är $3a=180^\circ$, vilket ger $a=60^\circ$. | 1 |
| | Den största av vinklarna är $a+d=103^\circ$, dvs. $d=43^\circ$. Vinklarnas storlek är därmed $17^\circ, 60^\circ$ och $103^\circ$. | 1 |
| | **ELLER:** | |
| | $103^\circ + 103^\circ - d + 103^\circ - 2d = 180^\circ$ eller motsvarande. | 3 |
| | Endast bild där en vinkel är 103°. | 0 |
| | Endast svar. | 1 |
| **b)** | Vi betecknar vinklarna $x, qx$ och $q^2x$, av vilka den minsta vinkeln är $x=\frac{\pi}{7}$. | 1 |
| | Vinklarnas summa är $\frac{\pi}{7}(1+q+q^2)=\pi$, vilket ger villkoret $q^2+q-6=0 \Leftrightarrow q=2 \vee q=-3$ (duger inte). | 1 |
| | Vinklarnas storlek är därmed $\frac{\pi}{7}, \frac{2\pi}{7}$ och $\frac{4\pi}{7}$. | 1 |
| | Om den givna vinkeln är den mittersta och vinklarna är $\frac{x}{q}, x$ och $qx$, där $x=\frac{\pi}{7}$, så är $q=3\pm 2\sqrt{2}$ och vinklarna $\frac{(3-2\sqrt{2})\pi}{7}, \frac{\pi}{7}, \frac{(3+2\sqrt{2})\pi}{7}$. | 1+1+1 |
| | *En lösning räcker. För moment b kan man få tre poäng antingen för en helt korrekt lösning, eller för två lösningar där de* två *första stegen är korrekta.* | |
| | Endast svar | 1 |

| | | |
|---|---|---|
| **6. a)** | Rännan är ett rakt prisma. Om ändtriangelns area är $A$, så är rännans volym $V_k = Ab$. | 1 |
| | Det återstående vattnet bildar en tresidig pyramid, vars volym är $V_v = \frac{1}{3}Ab$. Volymen av det avlägsnade vattnet är $V = \frac{2}{3}Ab = \frac{2}{3}V_k$. | 1 |
| | Vatten har runnit bort med $\frac{2}{3}$ av hela mängden, dvs. $\frac{200}{3}\% = 66\frac{2}{3}\% \approx 67\%$. | 1 |
| **b)** | Ändtriangelns höjd $H = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ och area $A_1 = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. | 1 |
| | Genom att jämföra areorna för ändtrianglarna $\dfrac{d^2}{a^2} = \dfrac{1}{3}$ eller ur ekvationen $\frac{1}{3}A_1 b = \frac{\sqrt{3}}{4}d^2 b$ fås $d = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$. (Figur nedan) | 1 |
| | Vattnets höjd är därmed $\dfrac{d\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot 2} = \dfrac{a}{2}$. | 1 |
| | Närmevärden ok om svaret är 0,5a eller a/2, annars max 2. | |
| | Numeriska värden använts för $a$ eller $b$. | max 4 |
| | Moment a fel i moment b. | max 3 |



| | | |
|---|---|---|
| **7. a)** | Avståndsvillkoret ger ekvationen $\sqrt{x^2+y^2}=\lvert 2-y\rvert$, (redan en bra bild ger den första poängen), | 1+1 |
| | av vilket vi får $x^2+y^2=4-4y+y^2$, | 1 |
| | alltså $y=-\frac{1}{4}x^2+1$. (de två sista stegen även med räknare).<br>OBS: ”y=” eller ”f(x)=” krävs. | 1 |
| | **ELLER:** | |
| | Noterats vara en parabel och funktionens uttryck erhållet med tre punkter och ekvationssystem. | 4 |
| | Tecken för absolutbelopp saknas. | -0 |
| **b)** | Kurvan skär $x$-axeln, då $y=0$. Av villkoret $-\frac{1}{4}x^2+1=0$ följer $x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$. | 1 |
| | Eftersom området ligger ovanför $x$-axeln (och är symmetriskt med avseende på $y$-axeln) är den efterfrågade arean $2\int_0^2(-\frac{1}{4}x^2+1)dx=$<br>$2\Big/_0^2\left(-\frac{1}{12}x^3+x\right)=2\left(-\frac{2}{3}+2\right)=\frac{8}{3}$. | 1 |
| | Värdet på den bestämda inegralen med räknare. | -0 |
| | Moment a fel men nedåtvänd parabel, moment b max 2. | |

| | | |
|---|---|---|
| **8. a)** | Olika rutter:   | 1 |
| | Rutternas sannolikheter är från vänster: $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{8}$, $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{8}$, $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{4}$ | 2 |
| | En eller två sannolikheter fel. | -1 |
| | Minst en rutt och dess sannolikhet rätt | 1 |
| | Fyra rutter och deras sannolkheter rätt | 2 |
| **b)** | Möjliga mötesplatser är punkterna $P_1$ och $P_2$. | 1 |
| | Sannolikheten för att mötas i punkten $P_1$ är $p_1=(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2})(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2})$.<br>Sannolikheten för att mötas i punkten $P_2$ är<br>$p_2=(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 1)(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 1)$.<br>**ELLER**<br>$p_1=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}$ och $p_2=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}$ | 1 |
| | Den efterfrågade sannolikheten är $p_1+p_2=\frac{1}{16}+\frac{9}{16}=\frac{5}{8}$. | 1 |
| | Endast den ena mötespunkten beaktad i beräkningen. | max 1 |
| | Moment a fel men summan av sannolikheterna 1, moment b max3 | |

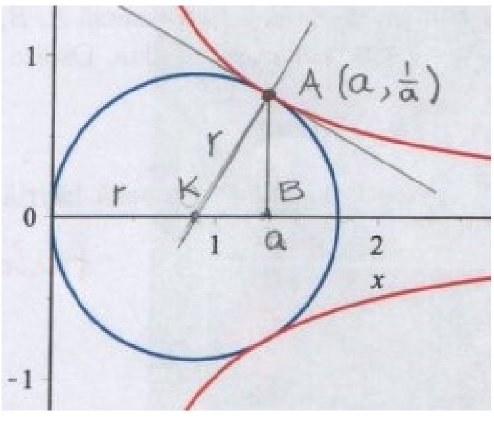
| | | |
|---|---|---|
| **9.1.** | Uppdelning i faktorer: $n^3+6n^2-7n=n(n^2+6n-7)=(n-1)n(n+7)$ **ELLER** $6n^2$ inverkar inte på delbarheten. | 1 |
| | Av två på varandra följande heltal $n-1$ och $n$ är det ena säkert jämnt, vilket betyder att detta tal har talet 2 som faktor. | 1 |
| | Om det ena av talen $n-1$ och $n$ är delbart med tre så har det talet 3 som faktor. | 1 |
| | Om så inte är fallet, så är talet $n+1$ med säkerhet delbart med tre. | 1 |
| | liksom också talet $(n+1)+6=n+7$. | 1 |
| | Om det ursprungliga talet är delbart med talen 2 och 3, är det också delbart med talet $2\cdot 3=6$. | 1 |
| | **ELLER:** | |
| | Uppdelning i faktorer: $n^3+6n^2-7n=n(n^2+6n-7)=(n-1)n(n+7)$ | 1 |
| | Av två på varandra följande heltal $n-1$ och $n$ är det ena säkert jämnt, vilket betyder att detta tal har talet 2 som faktor. | 1 |
| | Eftersom $n\equiv n$ (mod 3), $n+7\equiv n+1$ (mod 3) och $n-1\equiv n+2$ (mod 3), | 2 |
| | är talen $n-1, n$ och $n+7$ av olika restklass (mod 3). Alltså är något av dessa $\equiv 0$ (mod 3), dvs. delbart med talet 3. | 1 |
| | Eftersom det ursprungliga talet är delbart med talen 2 och 3, är det också delbart med talet $2\cdot 3=6$. | 1 |
| | **ELLER:** | |
| | Noterats vara jämnt och undersökts $3q$, $3q+1$ ja $3q+2$. | 3 |
| | **ELLER:** | |
| | Undersökts $6q$, $6q+1$, …,$6q+5$ | |
| | | |
| | Faktorisering och insättningar med räknare ok. | |

| | | |
|---|---|---|
| **9.2. a)** | (Beräknat $2^7 - 60 \cdot 2 - 8 = 0$) | 1 |
| | $\frac{x^7-60x-8}{x^2-4} = \frac{x^6+2x^5+4x^4+8x^3+16x^2+32x+4}{x+2}$, (faktorisering av täljaren räcker) | 1 |
| | av vilket noterat att insättning inte leder till formen $\frac{0}{0}$. | 1 |
| | **ELLER:** | |
| | Grundat på l'Hôspitals regel. | 3 |
| | Svar endast med räknarens gränsvärdesunktion. | 0 |
| | Faktorisering eller motsvarande med räknare ok. | |
| **b)** | Eftersom $x^2-4=(x-2)(x+2)$, så kan det existera ett ändligt gränsvärde endast om $x-2$ också är en faktor i täljaren, dvs. om talet 2 är dess nollställe. | 1 |
| | Vi får villkoret $2^n - 128 = 0$, | 1 |
| | vilket ger $2^n = 2^7$, dvs. $n=7$.<br>(Gränsvärdet existerar alltså endast för värdet $n=7$.) | 1 |
| | Provat med numeriska värden | 0 |

## Del B2

| | | |
|---|---|---|
| **10. a)** | Iterering av $x = 2 + \ln x$ inleds: $x_0 = 1$, $x_1 = 2 + \ln 1 = 2$, | 1 |
| | $x_2 = 2 + \ln 2 = 2{,}6931\ldots$, $x_3 = 2 + \ln 2{,}6931\ldots = 2{,}9907\ldots$,<br>$x_4 = 3{,}0955\ldots$, $x_5 = 3{,}1299\ldots$, $x_6 = 3{,}1410\ldots$, $x_7 = 3{,}1445\ldots$,<br>$x_8 = 3{,}1456\ldots$, $x_9 = 3{,}1460\ldots$, $x_{10} = 3{,}1461\ldots(3.146140339)$<br>$x_{10}$ givet med tillräckligt många decimaler som grund för avrundningen. | 1 |
| | Svaret är $x_{10} \approx 3{,}146$. | 1 |
| **b)** | $x = 2 + \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = x - 2 \Leftrightarrow x = e^{x-2}$ | 1 |
| | Iterering:<br>$x_0 = 1$ $x_1 = 0{,}3678\ldots$ $x_2 = 01955\ldots$ $x_3 = 0{,}1645\ldots$<br>$x_4 = 0{,}1595\ldots$ $x_5 = 0{,}1587\ldots$ $x_6 = 0{,}1586\ldots$ $x_7 = 0{,}1585\ldots$<br>$x_8 = x_9 = x_{10} = 0{,}1585\ldots(0.1585943547)$<br>$x_{10}$ givet med tillräckligt många decimaler som grund för avrundningen. | 1 |
| | Svaret är $x_{10} \approx 0{,}159$. | 1 |
| | | |
| | Precisionsfel | -1-1 |
| | Iterering avbruten, t.ex. vid $x_8$. | -1-1 |
| | Avrundningen inte utskriven | -1 |
| | Iterering $x_2$, …, $x_9$ saknas. | -0 |
| | Endast svar. | 0 |

| | | |
|---|---|---|
| **11.** | Bild där kurvans normal går genom cirkelns medelpunkt **ELLER**<br>I figuren nedan är cirkelns radie $r$ och tangeringspunkten för kurvan $y=\frac{1}{x}$ och cirkeln är $A(a,\frac{1}{a})$. Eftersom $y'(x)=-\frac{1}{x^2}$, så är riktningskoefficienten för den till punkten $A$ dragna tangenten $-\frac{1}{a^2}$. | 1 |
| | Riktningskoefficienten för den till samma punkt dragna normalen är därmed $a^2$. | 1 |
| | Eftersom normalen också går genom cirkelns medelpunkt $K(r,0)$, så kan dess riktningskoefficient också skrivas $\frac{\frac{1}{a}}{a-r}$. Vi får ekvationen $a^2=\frac{\frac{1}{a}}{a-r}$ dvs. $a^3(a-r)=1$ (1). | 1 |
| | Vi får å andra sidan via den rätvinkliga triangeln $KBA$ och genom Pythagoras sats ekvationen $(a-r)^2+\left(\frac{1}{a}\right)^2=r^2$ (2). | 1 |
| | Vi bildar av ekvationerna<br>(1) och (2) paret $\begin{cases} a^3(a-r)=1 \\ (a-r)^2+\left(\frac{1}{a}\right)^2=r^2 \end{cases}$.<br>Av den övre ekvationen får vi $a-r=\frac{1}{a^3}$, vilket ger $r=a-\frac{1}{a^3}$. | |
| | Genom att substituera båda dessa i den nedre ekvationen får vi $\frac{1}{a^6}+\frac{1}{a^2}=a^2-\frac{2}{a^2}+\frac{1}{a^6}$, och vidare $a^4=3$, vilket ger $a=\pm\sqrt[4]{3}$, av vilka endast det positiva värdet duger. | 1 |
| | Vi får slutligen $r=a-\frac{1}{a^3}=\frac{a^4-1}{a^3}=\frac{3-1}{\sqrt[4]{27}}=\frac{2}{\sqrt[4]{27}}$ $(=0,8773...\approx 0,88)$. | 1 |
| | Räknarens normalfunktion och andra funktioner kan utnyttjas som en del av lösningen. Ekvationssystemet kan lösas med räknare. | |



| | | |
|---|---|---|
| **12. a)** | $\overline{N}\cdot\left(\overline{r}-\overline{r_0}\right)=\left(3\overline{i}-2\overline{j}+5\overline{k}\right)\cdot\left((x-1)\overline{i}+(y-2)\overline{j}+(z-3)\overline{k}\right)=$ | 1 |
| | $3(x-1)-2(y-2)+5(z-3)=3x-3-2y+4+5z-15=0 \Leftrightarrow$ $3x-2y+5z=14$. Konstanterna är därmed $a=3,\ b=-2,\ c=5$ och $d=14$. | 1 |
| **b)** | Den erhållna ekvationen satisfieras av värdena $x=1,\ y=2$ och $z=3$, eftersom $3-4+15=14$, vilket betyder att punkten ligger i planet. | 2 |
| **c)** | Exempelvis satisfierar punkten $(7,0,0)$ ekvationen $2x-5y+7z=14$. Vi kan alltså välja $\overline{r_0}=7\overline{i}$. Då är $\overline{r}-\overline{r_0}=(x-7)\overline{i}+y\overline{j}+z\overline{k}$. (Också till exempel vektorn $\overline{r_0}=2\overline{k}$ duger.) | 1 |
| | Om $\overline{N}=a\overline{i}+b\overline{j}+c\overline{k}$, så är $\overline{N}\cdot(\overline{r}-\overline{r_0})=0 \Leftrightarrow a(x-7)+by+cz=0$ $\Leftrightarrow ax+by+cz=7a$, vilket är lika med $2x-5y+7z=14$, då $a=2,\ b=-5$ och $c=7$, och då är $\overline{N}=2\overline{i}-5\overline{j}+7\overline{k}$. | 1 |
| | Om vektorn $\vec{N}$ löses med fel r_0 | max 1 |
| | Man kan även exempelvis först välja vektorn $\vec{N}$. | |
| | | |
| | Räknarens dotp och andra funktioner kan användas som en del av lösningen. | |
| | Enskilt räknefel | -1 |

| | | |
|---|---|---|
| **13. a)** | Talet $x=\frac{2}{3}$ är en rot till ekvationen $x-\frac{2}{3}=0$, dvs. även till ekvationen $3x-2=0$. Polynomet är därmed $P_a(x)=3x-2$. | 1 |
| **b)** | Genom att kvadrera ekvationen $x=\sqrt{3}$, får vi $x^2=3$. Som polynom duger därmed $P_b(x)=x^2-3$. | 1 |
| **c)** | Om $x=2+\sqrt{3}$, så är $x-2=\sqrt{3}$, av vilket vi genom att kvadrera får $(x-2)^2=3 \Leftrightarrow x^2-4x+1=0$. Som polynom duger därmed $P_c(x)=x^2-4x+1$. | 1 |
| **d)** | Om $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$, så är $x^2=5+2\sqrt{6}$, | 1 |
| | vilket ger $x^2-5=2\sqrt{6}$. Genom att kvadrera på nytt får vi $(x^2-5)^2=24$, | 1 |
| | vilket betyder att polynomet är $P_d(x)=x^4-10x^2+1$. | 1 |
| | | |
| | Det finns flera möjliga lösningar för varje moment. | |
| | Kan lösas exempelvis genom att använda sambandet mellan nollställen och omskrivning i faktorform samt differensen mellan kvadraterna. | |