YLIOPPILASTUTKINTOLAUTAKUNTA
STUDENTEXAMENSNÄMNDEN

MATEMATIKPROV, KORT LÄROKURS 18.3.2015
BESKRIVNING AV GODA SVAR

De beskrivningar av svarens innehåll och poängsättningar som ges här är inte bindande för studentexamensnämndens bedömning. Censorerna beslutar om de kriterier som används i den slutgiltiga bedömningen.

Av en god prestation framgår det hur examinanden har kommit fram till svaret. I lösningen måste det ingå nödvändiga uträkningar eller andra tillräckliga motiveringar och ett slutresultat. I bedömningen fästs uppmärksamhet vid helheten och vid de tre stegen start, mellansteg och slutresultat. Räknefel som inte väsentligt ändrar uppgiftens natur ger ingen betydande sänkning av antalet poäng. Räknefel och fel i den matematiska modellen som ändrar uppgiftens natur kan däremot sänka antalet poäng avsevärt.

I provet är räknaren ett hjälpmedel, och dess roll bedöms separat för varje uppgift. Om symbolräknare använts i en uppgift ska det framgå av prestationen. I lösningar av uppgifter som kräver analys räcker det inte enbart med ett svar som erhållits med hjälp av räknaren utan övriga motiveringar. Däremot räcker ett svar som examinanden fått med räknaren i allmänhet i rutinberäkningar. Detsamma gäller rutinmässiga delar av mera omfattande uppgifter. Exempel på sådana är omskrivning av uttryck, ekvationslösning samt derivering och integrering av funktioner.

Preliminär poängsättning

1.	Utgående från figuren går **linje 1** genom origo och punkten (1,2).	1
	Riktningskoefficienten är då $\frac{2}{1}=2$ och ekvationen $y=2x$.	1
	Linje 2 går genom punkterna (0,1) och (1,0). Linjens riktningskoefficient är $\frac{0-1}{1-0}=-1$.	1
	Linjen skär y-axeln i punkten $y=1$. Ekvationen är därmed $y=-x+1$.	1
	Linje 3 är parallell med x-axeln och skär y-axeln i punkten $y=-\frac{1}{2}$.	1
	Detta är också linjens ekvation.	1

2. a)	$x(4x-2)-3x(x-1)-x=4x^2-2x-3x^2+3x-x=x^2$,	1
	vars värde är 1 då $x=-1$.	1
b)	Exempelekvation $x^2-1=0$,	1
	vars ena rot är 1.	1
c)	Vi sätter in $x=2$ i ekvationen $x(x-5)+ax=2$,	1
	och får $2\cdot(-3)+2a=2 \Leftrightarrow 2a=8 \Leftrightarrow a=4$.	1

3. a)	Jämförelse: $\frac{226-18}{220-18}$	1
	$=\frac{208}{202}=1{,}0297...$,	1
	vilket betyder att kvinnans maximala puls är ca 3 % högre.	1
b)	Nedre gränsen är $0{,}60\cdot(226-30)=117{,}6\approx 118$.	2
	Övre gränsen är $0{,}70\cdot(226-30)=137{,}2\approx 137$.	1

4. a)	Enligt Pythagoras sats är $BC=\sqrt{8{,}1^2-4{,}4^2}$	1
	$=\sqrt{46{,}25}=6{,}8007...\approx 6{,}8$ (cm).	1
b)	Om de spetsiga vinklarna är γ och α, så är $\sin\gamma=\frac{4{,}4}{8{,}1}=0{,}5432... \Rightarrow \gamma=32{,}9024...^\circ\approx 32{,}9^\circ$.	1
	Därmed är $\alpha=90^\circ-\gamma\approx 57{,}1^\circ$.	1
c)	Arean är $\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC$	1
	$=\frac{1}{2}\cdot 4{,}4\cdot 6{,}8007\ldots=14{,}9616...\approx 15{,}0$ (cm^2)	1

5. a)	Riktningskoefficienten för den räta linje s som går genom punkterna $(0,15)$ och $(11,-56)$ i ett (h,T)-koordinatsystem är $k=\frac{-56-15}{11-0}=-\frac{71}{11}$.	1
	Detta betyder att luften avkyls med 71 grader då man stiger 11 km uppåt i intervallet $0\le h\le 11$ km.	1
	För varje kilometer uppåt avkyls luften med $\frac{71}{11}=6{,}4545...\approx 6{,}5$ grader.	1
b)	Linjen s skär T-axeln i punkten $T=15$ och dess riktningskoefficient $k=-\frac{71}{11}$.	1
	Linjens ekvation är då $T(h)=-\frac{71}{11}h+15$, där $0\le h\le 11$ km.	1
	Grafen är den del av linjen s, som motsvarar värdena $0\le h\le 11$.	1

6.	Presenningens areakrav: $(x+2h)\cdot 1=10$,	1
	vilket ger $x=10-2h$.	1
	Vedhögens volym $V(h)=x\cdot 1\cdot h=(10-2h)h=10h-2h^2$, $h>0$.	1
	$V'(h)=10-4h$, vars nollställe är $h=\frac{5}{2}$.	1
	Eftersom grafen av funktionen $V(h)$ är en nedåtvänd parabel är det fråga om ett maximiställe.	1
	Därmed är vedhögens bredd $x=10-2h=5$ (m) och höjd 2,5 m.	1

<table>
<tr><td>7.</td><td>Vi gör en tabell:
<table>
<tr><th></th><th>Hastighet (km/h)</th><th>Tid (min)</th></tr>
<tr><td>Vinter</td><td>x</td><td>15</td></tr>
<tr><td>Sommar</td><td>$x+20$</td><td>12</td></tr>
</table></td><td>2</td></tr>
<tr><td></td><td>Farten och åktiden är omvänt proportionella storheter</td><td>2</td></tr>
<tr><td></td><td>Vi får ekvationen $\frac{x}{x+20}=\frac{12}{15}$,</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>vilket ger $15x=12x+240 \Leftrightarrow x=80$ (km/h).</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>ELLER:</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Anta att vägavsnittets längd är s, sommarfarten är v_k och vinterfarten är v_t. Den tid som åtgår på vintern är 15 min = 0,25 h och på sommaren 12 min = 0,20 h.</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>Från hastighetsvillkoret $v_k=v_t+20$ får vi ekvationen
$\frac{s}{0,20}=\frac{s}{0,25}+20$,</td><td>2</td></tr>
<tr><td></td><td>vilket ger $s=20$.</td><td>2</td></tr>
<tr><td></td><td>Vinterfartbegränsningen $v_t=\frac{20}{0,25}=80$ (km/h).</td><td>1</td></tr>
</table>

8. a)	Populationens storlek efter 24 timmar är $N(24)=1000\cdot 1,25^{24}$	1
	$=211758,2368...\approx 212\,000$ bakterier.	1
b)	Eftersom tillväxtfaktorn i modellen är 1,25,	1
	växer populationen varje timme med 25 %.	1
c)	Populationens storlek överskrider en miljon då $N(t)>1\,000\,000$ dvs. $10^3\cdot 1,25^t>10^6 \Leftrightarrow 1,25^t>1000$.	1
	Genom att ledvis logaritmera med logaritmen med basen 10 får vi $t\lg 1,25>3 \quad \Leftrightarrow t>\frac{3}{\lg 1,25}=30,9565...$, vilket betyder att en miljon överskrids efter 31 timmar.	1

9.	Kurvan $y=(x+1)(x+3)(x-4)$ skär x-axeln då $x+1=0 \vee x+3=0 \vee x-4=0 \Leftrightarrow x=-1 \vee x=-3 \vee x=4$. Av dessa är den mittersta $x=-1$.	1
	Då kurvans ekvation omskrivs får vi $y=x^3-13x-12$.	1
	Derivatan $y'=3x^2-13$	1
	ger tangentens riktningskoefficient $y'(-1)=3-13=-10$.	1
	Om den efterfrågade vinkeln är α, så är $\tan\alpha=-10$,	1
	ur vilket $\alpha=-84,2894...^\circ \approx -84,3^\circ$.	1

10.	Resultatet 10 poäng nås genom att man i alla uppgifter gissar rätt, vilket ger $P(10)=\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$.	1
	Resultatet 9 poäng kan inte på något sätt uppnås därför att ett fel gissat svar ger resultatet $9-1=8$ p. Därför är $P(9)=0$.	1
	Vid resultatet 8 poäng kan det svar som är fel gissat förekomma i 10 olika frågor.	1
	Formeln för binomial sannolikhet ger: $P(8)=\binom{10}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^9=10\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$.	2
	Den efterfrågade sannolikheten är $P(8)+P(9)+P(10)=11\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=0,0107...\approx 1\ \%$	1

11. a)	Vi gör en tabell över informationen: <table><tr><th>Antalet filer (st.)</th><th>Filens storlek (kB)</th><th>Utlovat arvode/fil (€)</th><th>Kopierings-hastighet/ fil (s)</th></tr><tr><td>Bildfiler x</td><td>10</td><td>100</td><td>5</td></tr><tr><td>Textfiler y</td><td>1</td><td>8</td><td>1</td></tr></table>	1
	Hela arvodet $K(x,y)=100x+8y$ där $x,y\geq 0$.	1
b)	Begränsningsvillkor: $\begin{cases}10x+1y\leq 1000\\5x+1y\leq 600\end{cases}$ där $x,y\geq 0$.	1
	$\Leftrightarrow \begin{cases}y\leq -10x+1000\\y\leq -5x+600\end{cases}$.	1
c)	Begränsningslinjernas skärningspunkt: $\begin{cases}10x+y=1000\\5x+y=600\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=80\\y=200\end{cases}$. Linjernas skärningspunkter med koordinataxlarna: $\begin{cases}10x+y=1000\\y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=100\\y=0\end{cases}$ och $\begin{cases}x=0\\5x+y=600\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\y=600\end{cases}$.	1
	Vi jämför K-funktionens värden i hörnpunkterna: $K(0,600)=4800,\ K(80,200)=9600,\ K(100,0)=10000$. Eftersom det sista värdet är störst, lönar det sig för spionen att kopiera endast 100 st. bildfiler.	1

12. a)	Vi betecknar: bildrutans bredd $=16a$, höjd $=9a$ och diagonal $d=40$ tum $=40\cdot 2{,}54$ cm $=101{,}6$ cm.	1
	Pythagoras sats ger $(16a)^2+(9a)^2=d^2$, vilket ger $337a^2=d^2 \Leftrightarrow a=\frac{d}{\sqrt{337}}=5{,}5345\ldots$	1
	Bildrutans bredd är $16a=88{,}5520\ldots\approx 88{,}6$ (cm) och höjd $9a=49{,}8105\ldots\approx 49{,}8$ (cm).	1
b)	Bildrutans area är $(9a)(16a)=144a^2$	2
	$=4410{,}8\ldots\approx 4\,411(\text{cm}^2)$.	1

13.	Om vitsordets siffervärde är x och antalet (frekvensen) är f, så får vi tabellen:	3

x	f	$f \cdot x$	x^2	$f \cdot x^2$
7	7	49	49	343
6	20	120	36	720
5	30	150	25	750
4	16	64	16	256
3	9	27	9	81
2	4	8	4	16
0	0	0	0	0
$\sum$	86	418		2166

	Vitsordens medelvärde $\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{418}{86} = 4{,}8604... \approx 4{,}86$.	1
	Vitsordens standardavvikelse $\sigma = \sqrt{\overline{x^2} - \left(\bar{x}\right)^2} = \sqrt{\frac{2166}{86} - \left(\frac{418}{86}\right)^2}$ $= 1{,}2497\ldots \approx 1{,}25$.	2

14. **a)**	Om den årliga tillväxtfaktorn är x, så får vi villkoret $1000 \cdot x^3 = 1086{,}37$,	1
	ur vilket $x^3 = \frac{1086{,}37}{1000} = 1{,}08637 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{1{,}08637}$	1
	$= 1{,}0279... \approx 1{,}028$. Den nominella årliga räntesatsen är ca 2,8.	1
b)	På grund av inflationen har pengarnas värde minskat. Beloppet 1 000 € år 2010 motsvarar $1000 \cdot 1{,}085$€ =1 085 € år 2013.	1
	Den reella (verkliga) räntan under dessa tre år är 1086,37 − 1085 = 1,37 €.	2

15. **a)**	Sidovektorerna är $\overrightarrow{OA} = 2\bar{i} + \bar{j}$ och $\overrightarrow{OB} = 2\bar{i} - 4\bar{j}$.	1
	Därmed är diagonalvektorn $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (2+2)\bar{i} + (1-4)\bar{j} =$ $4\bar{i} - 3\bar{j}$. Det fjärde hörnet är därmed $(4,-3)$.	1
b)	Arean är $\lvert\overrightarrow{OA}\rvert \cdot \lvert\overrightarrow{OB}\rvert = \sqrt{2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-4)^2}$	1
	$= \sqrt{5} \cdot \sqrt{20} = \sqrt{100} = 10$.	1
c)	Kantvektorerna är $\overrightarrow{OA} = \bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$, $\overrightarrow{OB} = \bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$ och $\overrightarrow{OC} = 2\bar{i} - 2\bar{k}$.	1
	Därmed är rymddiagonalvektorn $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = (1+1+2)\bar{i} + (2-1)\bar{j} + (1+1-2)\bar{k} =$ $4\bar{i} + \bar{j}$. Det motsatta hörnet till origo är alltså (4,1,0).	1