YLIOPPILASTUTKINTOLAUTAKUNTA
STUDENTEXAMENSNÄMNDEN

MATEMATIKPROV, LÅNG LÄROKURS 18.3.2015
BESKRIVNING AV GODA SVAR

De beskrivningar av svarens innehåll och poängsättningar som ges här är inte bindande för studentexamensnämndens bedömning. Censorerna beslutar om de kriterier som används i den slutgiltiga bedömningen.

Av en god prestation framgår det hur examinanden har kommit fram till svaret. I lösningen måste det ingå nödvändiga uträkningar eller andra tillräckliga motiveringar och ett slutresultat. I bedömningen fästs uppmärksamhet vid helheten och vid de tre stegen start, mellansteg och slutresultat. Räknefel som inte väsentligt ändrar uppgiftens natur ger ingen betydande sänkning av antalet poäng. Räknefel och fel i den matematiska modellen som ändrar uppgiftens natur kan däremot sänka antalet poäng avsevärt.

I provet är räknaren ett hjälpmedel, och dess roll bedöms separat för varje uppgift. Om symbolräknare använts i en uppgift ska det framgå av prestationen. I lösningar av uppgifter som kräver analys räcker det inte enbart med ett svar som erhållits med hjälp av räknaren utan övriga motiveringar. Däremot räcker ett svar som examinanden fått med räknaren i allmänhet i rutinberäkningar. Detsamma gäller rutinmässiga delar av mera omfattande uppgifter. Exempel på sådana är omskrivning av uttryck, ekvationslösning samt derivering och integrering av funktioner.

Preliminär poängsättning

1.	I varje fall ska periferipunkten på enhetscirkeln märkas ut, och den båge som visar placeringen för det andra vinkelbenet och vinkelns riktning ska ritas.	
a)	$405^\circ = 360^\circ + 45^\circ$	2
b)	Det är fråga om en vinkel $90^\circ + 30^\circ$ som är riktad medurs.	2
c)	$\frac{3\pi}{4}$ rad $= 135^\circ$	2

2. a)	Dubbelolikheten $0 \le y \le \sqrt{\lvert x\rvert}$ satisfieras i det område av xy-planet som begränsas av kurvorna $y=\sqrt{x}$, $x \ge 0$, $y=\sqrt{-x}$, $x \le 0$, x-axeln och de lodräta linjerna $x=1$ och $x=-1$.	2
	Figur (Figur 2 i slutet)	1
b)	Ekvationen $x\sqrt{1+x}=\sqrt{2x}$ kan endast satisfieras då $x \ge 0$. Man kan då kvadrera ledvis. Vi får: $x^2(1+x)=2x \Leftrightarrow x^3+x^2-2x=0$	1
	$\Leftrightarrow x(x^2+x-2)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x^2+x-2=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=1 \vee x=-2$.	1
	Talet -2 uppfyller emellertid inte kvadreringsvillkoret $x \ge 0$, vilket betyder att lösningen är $x=0 \vee x=1$.	1

3.	Antalet personer som talar ett främmande språk $m(t)=a\cdot 1{,}075^t$. Antalet år 2003 är $m(0)=a$.	1
	År 2013 är antalet $m(10)=a\cdot 1{,}075^{10}$.	1
	År 2033 är antalet $2\cdot m(10)=2a\cdot 1{,}075^{10}$.	1
	Om den årliga tillväxtfaktorn under 30 år är k, så får vi ekvationen $a\cdot k^{30}=2a\cdot 1{,}075^{10}$,	1
	ur vilket följer $k^{30}=2\cdot 1{,}075^{10} \Leftrightarrow k=\sqrt[30]{2\cdot 1{,}075^{10}}$	1
	1,0483..., dvs. den årliga genomsnittliga ökningen är cirka 4,8 procent.	1

4. a)	Då $t=1$ är ekvationen $x^2+2x+1=0$	1
	$\Leftrightarrow (x+1)^2=0$ (eller med rotformeln $x=\frac{-2\pm\sqrt{4-4}}{2}$)	1
	$\Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$. ($x=\frac{-2}{2}=-1$)	1
b)	Eftersom $t \ne 0$ är det fråga om en andragradsekvation. Då finns det åtminstone en reell lösning då dess diskriminant $D \ge 0$.	1
	$D=\left(t^2+1\right)^2-4t^4=\left(t^2+1\right)^2-\left(2t^2\right)^2=\left(t^2+1+2t^2\right)\left(t^2+1-2t^2\right)$ $=\left(3t^2+1\right)\left(1-t^2\right)\ge 0$ (eller $-3t^4+2t^2+1\ge 0\ldots$)	1
	Eftersom produktens första faktor alltid är >0, så satisfieras olikheten då $1-t^2\ge 0 \Leftrightarrow t^2 \le 1 \Leftrightarrow -1\le t\le 1$. Svaret är därmed $-1\le t\le 1 \wedge t\ne 0$.	1

5.	Sträckornas riktningskoefficienter är $k_{AB} = \frac{1-2}{3+2} = -\frac{1}{5}$, $k_{CD} = \frac{-1-3}{1+2} = -\frac{4}{3}$	1
	och ekvationer $s_{AB}: y-1 = -\frac{1}{5}(x-3) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{5}x + \frac{8}{5}$ och $s_{CD}: y+1 = -\frac{4}{3}(x-1) \Leftrightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$.	1+1
	Genom att jämföra de högra leden får vi: $-\frac{1}{5}x + \frac{8}{5} = -\frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$	1
	$\Leftrightarrow -3x + 24 = -20x + 5 \Leftrightarrow x = -\frac{19}{17}$.	1
	Genom att substituera detta i ekvationen s_{CD} får vi: $y = -\frac{4}{3}\left(-\frac{19}{17}\right) + \frac{1}{3} = \frac{31}{17}$. Skärningspunkten är alltså $\left(-\frac{19}{17}, \frac{31}{17}\right)$.	1

6.	Normering: Då intelligenskvoten X är normalfördelad $N(100,15)$, så är variabeln $Z = \frac{X-100}{15}$ normerat normalfördelad $N(0,1)$.	1
	Anta att den övre gränsen är a. Då måste gälla att $P(-a < X < a) = 0{,}50$, dvs. utgående från symmetrin hos normalfördelningen måste det gälla att $P(X < a) = 0{,}75$,	1
	dvs. $P\left(Z < \frac{a-100}{15}\right) = \Phi\left(\frac{a-100}{15}\right) = 0{,}75$.	1
	Enligt tabellen för fördelningsfunktionen är $\frac{a-100}{15} \approx 0{,}68$,	1
	ur vilket $a \approx 15 \cdot 0{,}68 + 100 = 110{,}2$.	1
	Det efterfrågade intervallet är $[100-10, 100+10] = [90, 110]$ eller $[89, 111]$. Man kan också ange gränserna med en decimals noggrannhet.	1

7. a)	Uttrycket $\ln(\sin x)$ är definierat då $\sin x > 0$	1
	$\Leftrightarrow n2\pi < x < \pi + n2\pi$ $[\Leftrightarrow n2\pi < x < (2n+1)\pi]$, $n \in \mathbf{Z}$.	2
b)	$\lvert\ln(\sin x)\rvert = 2 \Leftrightarrow \ln(\sin x) = \pm 2 \Leftrightarrow \sin x = e^{\pm 2}$. Förtecknet + duger inte, därför att $e^2 > 1$. Vi får $\sin x = e^{-2}$,	1
	som har en lösning $x_1 = 0{,}1357... \approx 0{,}14$, och de övriga lösningarna i det givna intervallet är $x_2 = \pi - x = 3{,}0058... \approx 3{,}01$, $x_3 = 2\pi + x = 6{,}4189... \approx 6{,}42$ och $x_4 = 3\pi - x = 9{,}2890... \approx 9{,}29$.	2
	En lösning felaktig	–1
	Flera lösningar felaktiga	–2

8. a)	Radien för cisternens cirkulära tvärsnitt är $r = \frac{13}{2}$ dm och cisternens längd är l. 1 liter = 1 dm^3.	1
	Cisternens volym $V = \pi r^2 l = \pi\left(\frac{13}{2}\right)^2 l = 3000\,(\mathrm{dm}^3)$.	1
	Ur detta får vi $l = \dfrac{4 \cdot 3000}{\pi \cdot 13^2} = 22{,}6018...$ (dm). Cisternens längd är alltså ca 2,3 m eller 2,26 m.	1
b)	Med figurens beteckningar $r = 65$ cm, $a = r - h = 25$ cm och $b = \sqrt{r^2 - a^2} = \sqrt{3600} = 60$ (cm). Centraltriangelns area är $A_k = \frac{1}{2} \cdot 2b \cdot a = ab = 1500$ (cm^2). (Figur 8 i slutet)	1
	Om halva medelpunktsvinkeln är φ, så gäller för denna att $\sin\varphi = \dfrac{b}{r} = \dfrac{60}{65} = 0{,}9230...$, ur vilket $\varphi = 67{,}3801...^\circ$. Sektorns area $A_s = \dfrac{2\varphi}{360^\circ}\pi r^2 = 4968{,}622...\,\mathrm{cm}^2 = 49{,}6862...\,\mathrm{dm}^2$.	1
	Segmentets area $A = A_s - A_k = 34{,}6862...\,\mathrm{dm}^2$. Volymen av den olja som är kvar är då $Al = 783{,}9705...\,\mathrm{dm}^3 \approx 784$ liter.	1

9.	Anta att radien för tältets botten är r och att sidan har längden s, varvid höjden är $h = \sqrt{s^2 - r^2}$. Arean för tältets mantel är $A = \pi r s = 16$, ur vilket $s = \frac{16}{\pi r}$.	1
	Tältets volym $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{s^2 - r^2}$.	1
	Vi substituerar i detta uttryck $s = \frac{16}{\pi r}$ och får $V(r) = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot \sqrt{\frac{256}{\pi^2 r^2} - r^2} = \frac{1}{3}\sqrt{256 r^2 - \pi^2 r^6}$.	1
	$V(r)$ är störst då uttrycket under roten $f(r) = 256r^2 - \pi^2 r^6$, $r > 0$, är störst. Vi deriverar: $f'(r) = 512r - 6\pi^2 r^5 = 2r\left(256 - 3\pi^2 r^4\right)$.	1
	Nollställen: $f'(r) = 0 \Leftrightarrow r = 0 \vee r^4 = \frac{256}{3\pi^2} \Leftrightarrow r = 0 \vee r = \pm\frac{4}{\sqrt[4]{3\pi^2}}$.	1
	Av dessa duger endast $r = +\frac{4}{\sqrt[4]{3\pi^2}}$, och dess närmevärde är 1,715. Det är också maximistället för volymen $V(r)$, vilket betyder att den efterfrågade diametern för golvet är $2r \approx 3{,}43$ m.	1

10.	Rotationskroppens volym $V = \pi\int_0^1 y^2 dx = \pi\int_0^1 a^2 x dx = \pi a^2 \Big/_0^1 \tfrac{1}{2}x^2 = \tfrac{1}{2}\pi a^2$. (Volymen får man också direkt med formeln för volymen av en rotationsparaboloid $V = \frac{1}{2}\pi r^2 h$.)	1
	Villkoret för volymen $\tfrac{1}{2}\pi a^2 = 2\pi \Leftrightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow a = \pm 2$, av vilka endast förtecknet + duger.	1
	Eftersom $y = 2\sqrt{x}$, är $y' = \dfrac{2}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.	1
	Arean för den efterfrågade rotationsytan $A = 2\pi\int_0^1 \lvert y\rvert\sqrt{1+(y')^2}\,dx$ $= 2\pi\int_0^1 \lvert 2\sqrt{x}\rvert\sqrt{1+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}\,dx = 4\pi\int_0^1 \sqrt{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}\,dx =$	1
	$4\pi\int_0^1 \sqrt{x+1}\,dx = 4\pi \Big/_0^1 \dfrac{(x+1)^{3/2}}{3/2} =$	1
	$= \dfrac{8\pi}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right) = 15{,}3177\ldots \approx 15{,}3$ ytenheter.	1

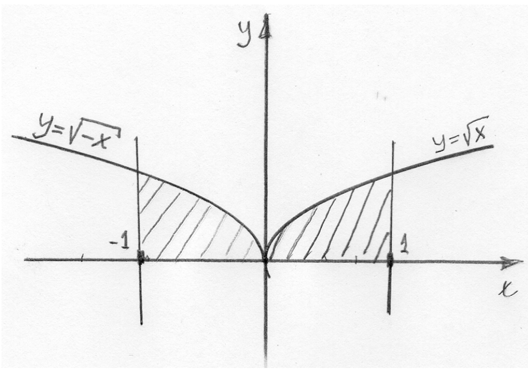
11.	Det sexsiffriga talet i 7-systemet $n = a_5 \cdot 7^5 + a_4 \cdot 7^4 + a_3 \cdot 7^3 + a_2 \cdot 7^2 + a_1 \cdot 7 + a_0$ skrivs i formen $a_5(6+1)^5 + a_4(6+1)^4 + a_3(6+1)^3 + a_2(6+1)^2 + a_1(6+1) + a_0$.	2
	Enligt binomialformeln är $(6+1)^5 = 6^5 + 5 \cdot 6^4 \cdot 1 + 10 \cdot 6^3 \cdot 1^2 + 10 \cdot 6^2 \cdot 1^3 + 5 \cdot 6 \cdot 1^4 + 1 = 6a + 1$, där a är ett heltal.	1
	På motsvarande sätt fås alla lägre potenser av uttrycket $6+1$. Därmed är $n = a_5(6a+1) + a_4(6b+1) + a_3(6c+1) + a_2(6d+1) + a_1(6e+1) + a_0$	1
	$= 6(a_5a + a_4b + a_3c + a_2d + a_1e) + (a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0)$	1
	Eftersom summans första term är delbar med talet sex, är hela summan och därmed också talet n delbart med talet sex exakt då siffrornas summa $a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0$ är delbar med talet sex.	1
	ELLER:	
	Eftersom $7 \equiv 1 \pmod 6$, är $7^n \equiv 1^n = 1 \pmod 6$ då $n = 1, 2, 3, \ldots$.	2
	Därmed gäller $a_5 \cdot 7^5 + a_4 \cdot 7^4 + a_3 \cdot 7^3 + a_2 \cdot 7^2 + a_1 \cdot 7 + a_0 \equiv$ $a_5 \cdot 1^5 + a_4 \cdot 1^4 + a_3 \cdot 1^3 + a_2 \cdot 1^2 + a_1 \cdot 1 + a_0 =$	3
	$a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 \pmod 6$. Påståendet är alltså bevisat.	1

12. a)	Vi betecknar $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$. Då är $f'(x) = 3x^2 + 4x + 10$.	1
	Diskriminanten D till ekvationen $3x^2 + 4x + 10 = 0$ är $D = 16 - 120 < 0$. Derivatan $f'(x)$ har inga nollställen, dvs. funktionen $f(x)$ är strängt monoton. Den ursprungliga ekvationen har alltså högst en rot.	1
	Eftersom $f(1) = -7 < 0$ och $f(2) = 16 > 0$, har ekvationen exakt en rot.	1
b)	Iterationsformeln $x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^3 + 2x_n^2 + 10x_n - 20}{3x_n^2 + 4x_n + 10}$	1
	ger $x_0 = 1$, $x_1 = 1{,}41176470588\ldots$, $x_2 = 1{,}36933647059\ldots$, $x_3 = 1{,}36880818862\ldots$, $x_4 = x_5 = 1{,}36880810782\ldots$.	1
	Den fjärde iterationen ger alltså det närmevärde som krävs.	1

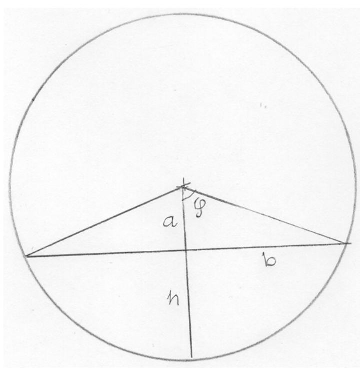
13. a)	Differenskvoten $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$ $\qquad (h \neq 0)$	1
	$= \dfrac{1}{h} \cdot \dfrac{h}{1+\lvert h\rvert} = \dfrac{1}{1+\lvert h\rvert}$	1
	$\to 1 = f'(0)$ då $h \to 0$. Påståendet är därmed bevisat.	1
b)	Då $f(x) = \dfrac{x}{1+\lvert x\rvert} = \begin{cases} \dfrac{x}{1+x}, & x>0 \\ \dfrac{x}{1-x}, & x<0 \end{cases}$ är $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1+x)^2}, & x>0 \\ \dfrac{1}{(1-x)^2}, & x<0 \end{cases}$.	1
	Differenskvoten $\dfrac{g(h)-g(0)}{h}$ granskas separat i de fall då $h>0$ och $h<0$. Enligt deluppgift *a* är $g(0) = f'(0) = 1$. Då $h>0$ är $g(h) = f'(h) = \dfrac{1}{(1+h)^2}$ och differenskvoten är $\dfrac{1}{h} \cdot \left(\dfrac{1}{(1+h)^2} - 1 \right) = \dfrac{1-1-2h-h^2}{h(1+h)^2} = \dfrac{-2-h}{(1+h)^2} \to \dfrac{-2}{1} = -2$ då $h \to 0+$.	1
	Då $h<0$ är $f'(h) = \dfrac{1}{(1-h)^2}$ och differenskvoten är $\dfrac{\dfrac{1}{(1-h)^2}-1}{h} = \dfrac{1-1+2h-h^2}{h(1-h)^2} = \dfrac{2-h}{(1-h)^2} \to \dfrac{2}{1} = 2$ då $h \to 0-$. Eftersom de ensidiga gränsvärdena (ensidiga derivatorna) är olika -2 och 2, så saknar funktionen $g(x)$ derivata i origo.	1

***14. a)**	Om x hundar anmäldes till båda utställningarna så är $31+x+43=1372$. Alltså är $x=1298$.	1
	$P(L \text{ och } S)=\frac{1298}{1372}$	1
	$=0{,}94606... \approx 95\,\%$.	1
b)	Händelserna A och B är oberoende om $P(A \text{ och } B)=P(A)\cdot P(B)$.	2
c)	$P(L)\cdot P(S)=\frac{1329}{1372}\cdot\frac{1341}{1372}=0{,}94677...$	1
	$\neq P(L \text{ och } S)$, alltså är händelserna L och S inte oberoende.	1
d)	Villkoret för oberoende är enligt deluppgift b $P(L \text{ och } S)=P(L)\cdot P(S)$, dvs. $\dfrac{b}{a+b+c}=\dfrac{a+b}{a+b+c}\cdot\dfrac{b+c}{a+b+c} \Leftrightarrow b(a+b+c)=(a+b)(b+c)$	1
	$\Leftrightarrow ab+b^2+bc=ab+ac+b^2+bc \Leftrightarrow ac=0 \Leftrightarrow a=0 \vee c=0$	1

***15. a)**	$\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}$ $\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{2}{3}$ $\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{3}{4}$ $\sum_{k=1}^{4}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4\cdot 5}=\frac{4}{5}$ $\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{4}{5}+\frac{1}{5\cdot 6}=\frac{5}{6}$	1
	Gissningen är alltså: $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{n}{n+1}$.	1
b)	$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{{}^{k+1)}A}{k}+\frac{{}^{k)}B}{k+1}=\frac{(A+B)k+A}{k(k+1)}$.	1
	Detta uppfylls för varje $k\in\mathbf{Z}_+$ då $\begin{cases}A+B=0\\ A=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=1\\ B=-1\end{cases}$.	1
c)	$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$	1
	$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$	1
	$=1-\frac{1}{n+1}$	1
	$=\frac{n}{n+1}$. Därmed är det bevisat att gissningen är sann.	1
d)	$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{{}^{(n}n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=\frac{1}{1+0}=1$.	1



Figur 2



Figur 8