MATEMATIKPROV, KORT LÄROKURS 23.9.2015
BESKRIVNING AV GODA SVAR

> De beskrivningar av svarens innehåll och poängsättningar som ges här är inte bindande för studentexamensnämndens bedömning. Censorerna beslutar om de kriterier som används i den slutgiltiga bedömningen.

Av en god prestation framgår det hur examinanden har kommit fram till svaret. I lösningen måste det ingå nödvändiga uträkningar eller andra tillräckliga motiveringar och ett slutresultat. I bedömningen fästs uppmärksamhet vid helheten och vid de tre stegen start, mellansteg och slutresultat. Räknefel som inte väsentligt ändrar uppgiftens natur ger ingen betydande sänkning av antalet poäng. Räknefel och fel i den matematiska modellen som ändrar uppgiftens natur kan däremot sänka antalet poäng avsevärt.

I provet är räknaren ett hjälpmedel, och dess roll bedöms separat för varje uppgift. Om symbolräknare använts i en uppgift ska det framgå av prestationen. I lösningar av uppgifter som kräver analys räcker det inte enbart med ett svar som erhållits med hjälp av räknaren utan övriga motiveringar. Däremot räcker ett svar som examinanden fått med räknaren i allmänhet i rutinberäkningar. Detsamma gäller rutinmässiga delar av mera omfattande uppgifter. Exempel på sådana är omskrivning av uttryck, ekvationslösning samt derivering och integrering av funktioner.

Preliminär poängsättning

1. a)	Det motsatta talet är $-(-1)=1$ och det inverterade talet $\frac{1}{5}$.	1
	Medelvärdet är $\dfrac{1+\frac{1}{5}}{2}=\dfrac{\frac{6}{5}}{2}=\frac{3}{5}$.	1
b)	Kvadratens sida $s=2$, varvid dess area är $A_n=2^2=4$. Cirkelns diameter = 2, varvid cirkelns radie $r=1$ och dess area $A_y=\pi\cdot 1^2=\pi$.	1
	Jämförelse: $\dfrac{A_n}{A_y}=\dfrac{4}{\pi}=1{,}2732\ldots$, dvs. kvadratens area är ca 27 % större.	1
c)	Eftersom baserna är lika kan vi likställa exponenterna: $3x-2=x+1$	1
	$\Leftrightarrow 2x=3 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$.	1

2.	Genom att förena hörnen i den mindre parallellogrammen märker vi att den stora parallellogrammen består av åtta trianglar.	2
	Varje triangel har basen 2 och höjden 1.	2
	Den mindre parallellogrammen innehåller hälften av trianglarna och dess area är $4\cdot\frac{2\cdot 1}{2}\ \text{cm}^2 = 4\ \text{cm}^2$. (Eller: Arean = hälften av den stora parallellogrammens area, dvs. $\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2\ \text{cm}^2 = 4\ \text{cm}^2$.)	2

3. a)	Enligt figuren är de x-koordinater som motsvarar y-koordinaten 1 för denna funktion $x=-1$ och $x=3$.	2
b)	Grafen skär x-axeln eller är under denna	1
	då $0\le x\le 2$.	1
c)	Enligt figuren är funktionen avtagande	1
	då $-2\le x\le 1$.	1

4. a)	Vi får massan m_a för hundens hjärna från ekvationen $1{,}0=\dfrac{m_a}{0{,}012\cdot 10^{2/3}}$	1
	vilket ger $m_a=1\cdot 0{,}012\cdot 10^{2/3}$	1
	$=0{,}0556...\approx 0{,}056$ (kg).	1
b)	Vi får människans genomsnittliga massa m från ekvationen $7{,}5=\dfrac{1{,}35}{0{,}012\cdot m^{2/3}}$	1
	vilket ger $m^{2/3}=\dfrac{1{,}35}{0{,}012\cdot 7{,}5}=15$.	1
	Därmed är $m=15^{3/2}=58{,}0947...\approx 58$ (kg)	1

5.	Den övre triangelns höjd är h. Eftersom trianglarna är likformiga (vv), får vi analogin $\dfrac{h}{33}=\dfrac{55}{63}$	3
	vilket ger $h=\frac{33\cdot 55}{63}=28{,}8095...$	2
	Brädets höjd är därmed $h+55=83{,}8095\ldots\approx 84$ (cm).	1

6. a)	Uttrycken är $a(x)=0,0662x+4,02$	1
	och $b(x)=0,0799x+3,75$	1
b)	Totalpriserna är lika då $0,0662x+4,02=0,0799x+3,75$	1
	$\Leftrightarrow 0,0137x=0,27 \Leftrightarrow x=\frac{0,27}{0,0137}=19,7080....$ Månadsförbrukningen ska vara cirka 19,7 kWh.	1
c)	Det årliga totalpriset för bolaget A: $12\cdot 4,02+2000\cdot 0,0662=180,64$ euro	1
	Bolaget B: $12\cdot 3,75+2000\cdot 0,0799=204,80$ euro	
	På ett år debiterar bolaget B $204,80-180,64=24,16$ euro mera.	1

7.	Anta att vi har $100a$ medvurst av vilket fett $36a$. Vi avlägsnar fett x.	1
	Ekvationen enligt den nya fetthalten: $\dfrac{36a-x}{100a-x}=\dfrac{30}{100}$	1
	vilket ger $360a-10x=300a-3x$	1
	$\Leftrightarrow 7x=60a \Leftrightarrow x=\frac{60a}{7}$.	1
	Jämförelse: $\dfrac{\frac{60a}{7}}{36a}$	1
	$=\frac{5}{21}=0,2380...\approx 24$ %	1

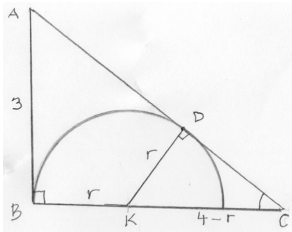
8.	Längden av sektorns omkrets är $b+2r$.	1
	Villkorsekvationen $b+2r=1$ ger $b=1-2r$.	1
	Sektorns area $A(r)=\frac{br}{2}=\frac{1}{2}r-r^2$ där $0<r<\frac{1}{2}$.	1
	Eftersom grafen av areafunktionen är en nedåtvänd parabel, får vi största värdet av arean i parabelns topp.	1
	Där är $A'(r)=\frac{1}{2}-2r=0$	1
	som uppfylls då $r=\frac{1}{4}=0,25$ (m). Detta är samtidigt den efterfrågade radiens längd.	1

9.	Rektangelns ursprungliga area $=20{,}0\cdot 12{,}0=240$ (m^2).	1
	Bredden av den remsa som gräsmattan ska utökas med är x. Den nya rektangelns längd är $20+x$ och bredd $12+x$.	1
	Rektangelns area är nu $(20+x)(12+x)$.	1
	Fördubblingen ger ekvationen $(20+x)(12+x)=2\cdot 240$, som förenklas till formen $x^2+32x-240=0$.	1
	Vi får med rotformeln $x=-16\pm 4\sqrt{31}$ av vilket endast den positiva roten $6{,}2710...\approx 6{,}3$ duger.	1
	Den nya gräsmattans längd är därmed $20{,}0+x\approx 26{,}3$ (m) och bredd $12{,}0+x\approx 18{,}3$ (m).	1

10.	Linjen $y=3-3x$ skär koordinataxlarna i punkterna (0,3) och (1,0).	1
	Mittpunkten på hypotenusan till den rätvinkliga triangel som bildas är $\left(\frac{0+1}{2},\frac{3+0}{2}\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$.	1
	Delningslinjen går genom denna punkt, eftersom deltrianglarna då har samma bas (= halva hypotenusan) och samma höjd (= avståndet från origo till den givna linjen).	3
	Den efterfrågade riktningskoefficienten $k=\frac{3/2}{1/2}=3$.	1

11. a)	Vi betecknar tidpunkten i början av januari med $t=0$, varvid slutet av april motsvarar $t=4$ och december $t=12$. Enheten för tiden t är månad. Linjär tillväxt beskrivs av en linje som går genom punkterna (1, 7817) och (4, 13238).	1
	Linjens ekvation är $y=\frac{13238-7817}{4-1}t+7817=1807t+7817$.	1
	Försäljningsuppskattningen är $y(12)=1807\cdot 12+7817=$ 29 501 (st.).	1
b)	Den exponentiella tillväxten beskrivs av ekvationen $y(t)=y(1)\cdot k^{t-1}$ där k är tillväxtfaktorn.	1
	Vi får denna med ekvationen $13238=7817\cdot k^3$ vilket ger $k^3=\frac{13238}{7817}$ $\Leftrightarrow k=\sqrt[3]{\frac{13238}{7817}}$ [=1, 1919…].	1
	Uppskattningen är $y(12)=7817\cdot k^{11}=53939{,}68...\approx 53\,940$ (st.).	1

12.	Beteckningar: Cirkelns medelpunkt är *K*, cirkelns tangeringspunkt på hypotenusan är *D* och cirkelns radie är *r*. (Figur nedan)	
	Hypotenusans längd $AC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.	1
	$KC = 4 - r$	1
	Trianglarna *ABC* och *KDC* är likformiga (vv, båda har en rät vinkel och vinkeln C är gemensam).	2
	Vi får villkoret $\dfrac{r}{4-r} = \dfrac{3}{5}$	1
	vilket ger $5r = 12 - 3r$, dvs. $r = \frac{3}{2}$.	1



13. a)	Den tid som hårtorken fungerar = *t*. Variabeln är normalfördelad $N(15,2;2,5)$. Enheten är en månad. Då är den normerade variabeln $T = \frac{t-15,2}{2,5}$ normalfördelad $N(0,1)$.	1
	Sannolikheten för att hårtorken håller högst garantitiden 1 år är $P(t \le 12) = P\left(T \le \frac{12-15,2}{2,5}\right) = \Phi(-1,28) = 1 - \Phi(1,28)$	1
	$\approx 1 - 0,8997 = 0,1003$. Alltså måste cirka 10 % av torkarna repareras under garantitiden.	1
b)	Sannolikheten för att hårtorken ska vara felfri över 18 månader är $P(t > 18) = 1 - P(t \le 18)$	1
	$= 1 - P\left(T \le \frac{18-15,2}{2,5}\right) = 1 - \Phi(1,12)$	1
	$\approx 1 - 0,8686 = 0,1314$. Därmed håller cirka 13 % av torkarna 1,5 år.	1

14. a)	Skattens storlek är $f(x) = 0,30 \cdot 40000 + 0,32 \cdot (x - 40000)$	1
	$= 0,32x - 800$ då $x > 40000$.	1
b)	Skattens storlek är $f(41700,23) = 0,32 \cdot 41700,23 - 800$	1
	$= 12544,0736 \approx 12544,07$ (€).	1
c)	Den skattepliktiga andelen är $0,85 \cdot 41700,23 \approx 35445,20$. Av detta tas i kapitalinkomstskatt 30 % dvs. $0,30 \cdot 35445,20 = 10\ 633,56$ (€).	1
	Personens skatteprocent är därmed $\frac{10633,56}{41700,23} \cdot 100 \approx 25,5$.	1

15. a)	Vi får sittkorgens högsta höjd då sinustermens värde är 1 och lägsta höjden då termens värde är -1. Den högsta höjden är då 17 + 55 = 72 (m) och den minsta $-17+55=38$ (m).	1
	Diametern på pariserhjulet är därmed $72-38\,[=2\cdot 17]=34$ (m).	1
b)	Man uppnår maximihöjden när det första gången gäller att $\sin\left(\frac{\pi t}{25}\right)=1$,	1
	dvs. då $\frac{\pi t}{25}=\frac{\pi}{2}+n2\pi$, där vi får det minsta värdet på t för värdet $n=0$. Därmed är ekvationen $\frac{\pi t}{25}=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow t=\frac{25}{2}=12{,}5$ (s).	1
c)	Vi får den efterfrågade tidpunkten med ekvationen $y(t)=45$, dvs. $17\sin\left(\frac{\pi t}{25}\right)+55=45\Leftrightarrow\quad \sin\left(\frac{\pi t}{25}\right)=\frac{45-55}{17}=-0{,}5882...$	1
	$\Leftrightarrow\frac{\pi t}{25}=-0{,}6288...\vee\frac{\pi t}{25}=\pi+0{,}6288...\Leftrightarrow\quad t=-\frac{25\cdot 0{,}6288...}{\pi}\approx-5{,}0044...$ eller $t=25+\frac{25\cdot 0{,}6288...}{\pi}\approx 30{,}0044...$.	1
	Det negativa värdet duger inte, eftersom $t\geq 0$. Svaret är cirka 30,0 s.	1