MATEMATIKPROV, LÅNG LÄROKURS 23.9.2015
BESKRIVNING AV GODA SVAR

De beskrivningar av svarens innehåll och poängsättningar som ges här är inte bindande för studentexamensnämndens bedömning. Censorerna beslutar om de kriterier som används i den slutgiltiga bedömningen.

Av en god prestation framgår det hur examinanden har kommit fram till svaret. I lösningen måste det ingå nödvändiga uträkningar eller andra tillräckliga motiveringar och ett slutresultat. I bedömningen fästs uppmärksamhet vid helheten och vid de tre stegen start, mellansteg och slutresultat. Räknefel som inte väsentligt ändrar uppgiftens natur ger ingen betydande sänkning av antalet poäng. Räknefel och fel i den matematiska modellen som ändrar uppgiftens natur kan däremot sänka antalet poäng avsevärt.

I provet är räknaren ett hjälpmedel, och dess roll bedöms separat för varje uppgift. Om symbolräknare använts i en uppgift ska det framgå av prestationen. I lösningar av uppgifter som kräver analys räcker det inte enbart med ett svar som erhållits med hjälp av räknaren utan övriga motiveringar. Däremot räcker ett svar som examinanden fått med räknaren i allmänhet i rutinberäkningar. Detsamma gäller rutinmässiga delar av mera omfattande uppgifter. Exempel på sådana är omskrivning av uttryck, ekvationslösning samt derivering och integrering av funktioner.

Preliminär poängsättning

1. a)	Vi sätter in $x = 2015$ i ekvationen $ax = 2015 + a$. Vi får $2015a = 2015 + a$	1
	$\Leftrightarrow (2015-1)a = 2015 \Leftrightarrow a = \frac{2015}{2014}$.	1
b)	Om kvadratens sida är s, är diagonalen $s\sqrt{2}$. Villkor: $s\sqrt{2} = 6$,	1
	$\Leftrightarrow s = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$, vilket ger omkretsen $4s = 12\sqrt{2}$ $[=16{,}9705...]$	1
c)	Vi får det största talet då största möjliga positiva tal delas med minsta möjliga positiva tal, dvs. $\frac{2}{2} = 1$.	1
	Vi får det minsta talet, då det enda negativa talet delas med minsta möjliga positiva tal, dvs. $\frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$.	1

2. a)	Linjens riktningskoefficient $k=\frac{4-0}{3-0}=\frac{4}{3}$,	1
	och linjens ekvation är $y=\frac{4}{3}x$ eller $4x-3y=0$.	1
b)	Cirkelns radie $r=$ avståndet från punkten (3,4) till origo, dvs. $r=\sqrt{3^2+4^2}=5$.	1
	Ekvationen är $x^2+y^2=r^2$ dvs. $x^2+y^2=25$.	1
c)	Ekvationen för en uppåtvänd parabel med toppen i origo är i formen $y=ax^2$. Eftersom punkten (3,4) ligger på kurvan gäller: $4=a\cdot 3^2$	1
	$\Leftrightarrow a=\frac{4}{9}$, och parabelns ekvation är då $y=\frac{4}{9}x^2$.	1

3. a)	Om motionsstigens längd i terrängen är x så får vi med stöd av likformighet analogin $\frac{17{,}5}{x}=\frac{1}{20000}$, som ger $x = 20000 \cdot 17{,}5 = 350\,000$ (cm). Svar: 3 500 m.	3
b)	Om kubens kant är s, så är volymen $s^3=7\,\mathrm{dm}^3$.	1
	Då är $s=\sqrt[3]{7}$ dm,	1
	ur vilket vi får arean av en sidoyta $s^2=\left(\sqrt[3]{7}\right)^2\left[=\sqrt[3]{49}\right]=3{,}6593...\approx 3{,}66$ (dm^2). Svar: cirka 366 cm^2.	1

4.	Vektorer som står vinkelrätt mot vektorn $3\bar{i}+4\bar{j}$ är till exempel vektorerna $\bar{n}=\pm(4\bar{i}-3\bar{j})$, vilkas längd $=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$.	1
	Vektorer som är parallella med dessa och som har längden 3 är $\frac{3}{5}\bar{n}$.	1
	Därmed är $\overrightarrow{AB}=\pm(\frac{12}{5}\bar{i}-\frac{9}{5}\bar{j})$. Vektorn $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$.	1
	Vi får $\overrightarrow{OB}=\bar{i}+2\bar{j}+\frac{12}{5}\bar{i}-\frac{9}{5}\bar{j}=\frac{17}{5}\bar{i}+\frac{1}{5}\bar{j}$ eller $\overrightarrow{OB}=\bar{i}+2\bar{j}-\frac{12}{5}\bar{i}+\frac{9}{5}\bar{j}=-\frac{7}{5}\bar{i}+\frac{19}{5}\bar{j}$.	1+1
	Koordinaterna för punkten B är därmed $\left(\frac{17}{5},\frac{1}{5}\right)$ eller $\left(-\frac{7}{5},\frac{19}{5}\right)$.	1

5.	Avståndet från kordans mittpunkt till origo är $a=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$.	1
	Avståndet från kordans ändpunkter till origo = cirkelns radie $r=4$.	1
	Vi får hälften av kordans längd med Pythagoras sats: $b=\sqrt{r^2-a^2}$	2
	$=\sqrt{16-5}=\sqrt{11}$.	1
	Kordans längd är därmed $2b=2\sqrt{11}$.	1
	ELLER:	
	Anta att $P=(2,1)$. Sträckan OP måste vara vinkelrät mot kordan. Eftersom riktningskoefficienten för sträckan OP är $\frac{1}{2}$ så måste riktningskoefficienten för kordan vara -2.	1
	Kordan är därmed en del av linjen $y-1=-2(x-2)$ dvs. $y=-2x+5$.	1
	Vi får skärningspunkterna från ekvationsparet $\begin{cases} y=-2x+5 \\ x^2+y^2=16 \end{cases}$,	1
	ur vilket $\begin{cases} x=2+\sqrt{\frac{11}{5}} \\ y=1-2\sqrt{\frac{11}{5}} \end{cases} \vee \begin{cases} x=2-\sqrt{\frac{11}{5}} \\ y=1+2\sqrt{\frac{11}{5}} \end{cases}$.	2
	Kordans längd är $\sqrt{\left(2-\sqrt{\frac{11}{5}}-2-\sqrt{\frac{11}{5}}\right)^2+\left(1+2\sqrt{\frac{11}{5}}-1+2\sqrt{\frac{11}{5}}\right)^2}=\sqrt{4\cdot 11}=2\sqrt{11}$.	1

6. a)	Sannolikheten för att lyckas är $p_o=0{,}9$, och sannolikheten för att misslyckas är $p_e=1-0{,}9=0{,}1$. Antalet spel är *n*. Det är fråga om binomialsannolikhet.	1
	P(ett spel av fyra misslyckas) $=\binom{4}{1}\cdot 0{,}1^1\cdot 0{,}9^3=0{,}2916\approx 29$ %.	1
b)	Väntevärdet för en binomialfördelad variabel $EX=np_o=4\cdot 0{,}9=3{,}6$.	2
c)	Villkor: $n\cdot 0{,}9\geq 10 \Leftrightarrow n\geq \frac{10}{0{,}9}=11{,}1111.....$	1
	Spelet måste alltså spelas minst 12 gånger.	1

7.	Då triangelns ben är a, så är triangelns höjd $h = \frac{a}{\sqrt{2}}$. (Figur 7 på slutet)	1
	Om topptriangelns höjd är x, så är den inplacerade triangelns höjd $h - x$ och dess area $A(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x(h - x) = \frac{a}{\sqrt{2}} x - x^2$, där $0 \le x \le \frac{a}{\sqrt{2}}$.	2
	Eftersom grafen av funktionen $A(x)$ är en nedåtvänd parabel så är dess toppställe x medelvärdet av nollställena 0 och $\frac{a}{\sqrt{2}}$, vilket ger att $x = \frac{a}{2\sqrt{2}}$.	1
	Detta värde ger den största möjliga arean $A\left(\frac{a}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{8} a^2$.	2

8.	Om brytningstakten är a ton/år, så finns det i början av år 2015 totalt $50a$ ton stenkol.	1
	Om man ökade brytningstakten så skulle den brutna mängden stenkol i slutet av år $2015+t$ totalt vara $a+1{,}025a+1{,}025^2a+\ldots+1{,}025^{t-1}a$ ton.	1
	Villkor: $\frac{a(1-1{,}025^t)}{1-1{,}025}=\frac{a(1{,}025^t-1)}{0{,}025}=50a$	1
	$\Leftrightarrow 1{,}025^t-1=1{,}25 \Leftrightarrow 1{,}025^t=2{,}25$.	1
	Genom att logaritmera ledvis får vi: $t\lg 1{,}025=\lg 2{,}25$, $\Leftrightarrow t=\frac{\lg 2{,}25}{\lg 1{,}025}=32{,}8410\ldots$	1
	vilket ger $2015+t=2047{,}8410\ldots$. Svar: Stenkolet skulle ta slut under år 2048.	1

9.	Den bortskurna delen består av en rak cirkulär cylinder och två identiska sfäriska segment. Äpplets radie $R=5$ och cylinderns radie $r=1$. (Figur 9 på slutet)	
	Halva cylinderns höjd är x, för vilket vi ur den rätvinkliga triangeln får ekvationen $r^2+x^2=R^2$, från vilket $x=\sqrt{25-1}=2\sqrt{6}$.	1
	Cylinderns volym $V_l=\pi r^2\cdot 2x=4\pi\sqrt{6}=30{,}7811\ldots$.	1
	Det sfäriska segmentets höjd är $h=5-x=5-2\sqrt{6}$.	1
	Den sammanlagda volymen av segmenten är $V_s=2\pi h^2\left(R-\frac{h}{3}\right)=2\pi\left(5-2\sqrt{6}\right)^2\left(5-\frac{1}{3}\left(5-2\sqrt{6}\right)\right)=0{,}3184\ldots$.	1
	Hela den bortskurna delens volym är $V_l+V_s=30{,}7811\ldots+0{,}3184\ldots=31{,}0996\ldots$.	1
	En jämförelse ger volymförlusten $\frac{31{,}0996\ldots}{\frac{4}{3}\pi\cdot 5^3}=0{,}0593\ldots\approx 5{,}9\ \%$.	1

10. a)	Eftersom följden av längder är geometrisk så gäller i följden att $b = qa$ och $c = q^2 a$. Enligt Pythagoras sats är $a^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow a^2 + (qa)^2 = \left(q^2 a\right)^2$.	1
	Genom att ledvis dividera med talet a^2 får vi ekvationen $q^4 - q^2 - 1 = 0$, från vilket $q^2 = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Det negativa förtecknet duger inte.	1
	Kvoten är $q = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$, där endast det positiva förtecknet duger. Svar: $q = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.	1
b)	Den aritmetiska talföljdens differens $= d$. Då är följden $b - d,\ b,\ b + d$.	1
	Pythagoras sats ger $(b-d)^2 + b^2 = (b+d)^2$ $\Leftrightarrow b^2 - 4bd = 0 \Leftrightarrow b = 0 \vee b = 4d$.	1
	Följden är därmed $3d,\ 4d,\ 5d$, från vilket vi får förhållandet $a:b:c = 3:4:5$.	1

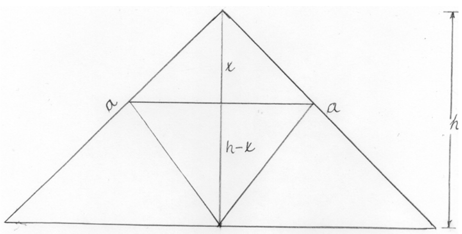
11. a)	Siffersumman $45 + 4n$ måste vara delbar med talet 3. Eftersom summans första term är delbar med talet 3, så måste också den andra termen vara det.	1
	Eftersom faktorn 4 inte är det så måste faktorn n vara det. Därmed gäller att $n = 0, 3, 6$ eller 9.	1
b)	Talet är delbart med 6 endast om det är delbart med både talet 2 och med talet 3.	1
	Då gäller att siffran n måste tillhöra både mängden $\{0,2,4,6,8\}$ och mängden $\{0,3,6,9\}$. Endast siffrorna 0 och 6 tillhör båda mängderna.	1
c)	Siffersumman $45 + 4n$ måste vara delbar med talet 9.	1
	Som i deluppgift a kan vi sluta oss till att $n = 0$ eller 9.	1

12.	Eftersom $x-1$ och $x+3$ är polynomets faktorer, är också $(x-1)(x+3)=x^2+2x-3$ en faktor.	2
	Vi får $P(x)=2x^3+5x^2-4x-3=(cx+d)(x^2+2x-3)$.	1
	Med hjälp av multiplikation och förenkling och genom att jämföra koefficienter kan vi sluta oss till att $c=2$ och $d=1$.	1
	Den tredje faktorn är därmed $2x+1$ och det tredje nollstället är $-\frac{1}{2}$.	1
	Rötterna till ekvationen $P(x)=0$ är alltså $-3, -\frac{1}{2}$ och 1.	1

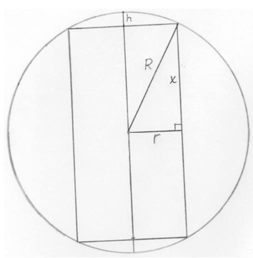
13. a)	Exempelföljd $a_n=(-1)^n$**,** dvs. talföljden $-1,1,-1,1,-1,...,$	1
	Talföljden är begränsad eftersom det för varje $n=1,2,3,...$ gäller att $\lvert a_n\rvert=1$. Talföljden konvergerar inte.	1
b)	Exempelföljd $a_n=-n$, dvs. talföljden $(-1,-2,-3,...)$,	1
	Talföljden är avtagande eftersom det för varje $n=1,2,3,...$ gäller att $a_{n+1}-a_n=-(n+1)-(-n)=-1<0$. Den är heller inte begränsad eftersom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=-\infty$.	1
c)	Villkoret uppfylls till exempel då $p=2$ eftersom i) $\int_1^\infty x^{-2}dx=\lim\limits_{k\to\infty}\int_1^k x^{-2}dx=\lim\limits_{k\to\infty}\Big/_1^k -x^{-1}=\lim\limits_{k\to\infty}\left(1-\frac{1}{k}\right)=1$, dvs. integralen är konvergent.	1
	ii) $\int_1^\infty \sqrt{x^{-2}}dx=\lim\limits_{k\to\infty}\int_1^k x^{-1}dx=\lim\limits_{k\to\infty}\Big/_1^k \ln\lvert x\rvert=\lim\limits_{k\to\infty}\ln k=\infty$, dvs. integralen är divergent.	1

***14. a)**	Linjens riktningsvektor är $\bar{s} = 2\bar{i} + 3\bar{j} + 7\bar{k}$ vars längd är $\sqrt{4+9+49} = \sqrt{62}$.	1
	Riktningscosinerna är $\cos\alpha = \frac{\bar{s}\cdot\bar{i}}{\lvert\bar{s}\rvert\lvert\bar{i}\rvert} = \frac{2}{\sqrt{62}}$, $\cos\beta = \frac{3}{\sqrt{62}}$ och $\cos\gamma = \frac{7}{\sqrt{62}}$.	2
b)	Kvadraternas summa är $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{4+9+49}{62} = 1$.	2
c)	$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{62}} = 0,2540... \Rightarrow \alpha = 75,2856...^\circ \approx 75,3^\circ$ $\cos\beta = \frac{3}{\sqrt{62}} = 0,3810... \Rightarrow \beta = 67,6043...^\circ \approx 67,6^\circ$ $\cos\gamma = \frac{7}{\sqrt{62}} = 0,8890... \Rightarrow \gamma = 27,2520...^\circ \approx 27,3^\circ$	2
	En vinkel fel	–1
	Två eller tre vinklar fel	–2
d)	Linjens riktningsvektor är $\bar{s} = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$. Kvadraten av dess längd är $\lvert\bar{s}\rvert^2 = a^2 + b^2 + c^2$,	1
	vilket ger att $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{a^2}{\lvert\bar{s}\rvert^2} + \frac{b^2}{\lvert\bar{s}\rvert^2} + \frac{c^2}{\lvert\bar{s}\rvert^2} = \frac{a^2+b^2+c^2}{\lvert\bar{s}\rvert^2} = 1$. Summan av riktningscosinernas kvadrater är därmed konstant 1 för alla linjer som går genom origo.	1

***15. a)**	Om $a = b$ är triangeln likbent och då är också $x = y$.	1
	Pythagoras sats ger $k^2 = a^2 - x^2 = aa - xx$.	1
	Om vi här ersätter ett *a* med *b* och ett *x* med *y* så får vi $k^2 = ab - xy$, av vilket påståendet följer.	1
b)	Anta att bisektrisen är φ. Med cosinus- och bisektrissatsen får vi villkoren $\begin{cases} x^2 = a^2 + k^2 - 2ak\cos\varphi \\ y^2 = b^2 + k^2 - 2bk\cos\varphi \\ \frac{x}{y} = \frac{a}{b} \end{cases}$.	1
	Ur de två första ekvationerna löser vi ut $2k\cos\varphi$ och likställer resultaten: $2k\cos\varphi = \frac{a^2 + k^2 - x^2}{a} = \frac{b^2 + k^2 - y^2}{b}$.	1
	Vi multiplicerar ledvis med *a*: $\frac{a}{b}(b^2 + k^2 - y^2) = a^2 + k^2 - x^2$.	1
	Vi ersätter $\frac{a}{b} \to \frac{x}{y}$ och multiplicerar ledvis med *y*: $xb^2 + xk^2 - xy^2 = ya^2 + yk^2 - yx^2$. Vi löser ut k^2: $k^2 = \frac{ya^2 - yx^2 + y^2x - xb^2}{x - y}$.	1
	Vi substituerar $ya = bx$: $k^2 = \frac{abx - x^2y - aby + xy^2}{x - y}$.	1
	Gruppering: $k^2 = \frac{abx - aby - x^2y + xy^2}{x - y} = \frac{ab(x - y) - xy(x - y)}{x - y} = ab - xy$, av vilket påståendet följer. Lösningen förutsätter att $x - y \neq 0$, men villkoret gäller därför att vi antog att $a \neq b$, varvid också $x \neq y$.	1



Figur 7



Figur 9