Ylioppilastutkintolautakunta
Studentexamensnämnden

MATEMATIKPROV, KORT LÄROKURS 19.3.2014
BESKRIVNING AV GODA SVAR

De beskrivningar av svarens innehåll och poängsättningar som ges här är inte bindande för studentexamensnämndens bedömning. Censorerna beslutar om de kriterier som används i den slutgiltiga bedömningen.

Av en god prestation framgår det hur examinanden har kommit fram till svaret. I lösningen måste det finnas nödvändiga uträkningar eller andra tillräckliga motiveringar och ett slutresultat. I bedömningen fästs uppmärksamhet vid helheten och vid de tre stegen start, mellansteg och slutresultat. Räknefel som inte väsentligt ändrar uppgiftens natur ger ingen betydande sänkning av antalet poäng. Räknefel och fel i den matematiska modellen som ändrar uppgiftens natur kan däremot sänka antalet poäng avsevärt.

I provet är räknaren ett hjälpmedel, och dess roll bedöms separat för varje uppgift. Om symbolräknare använts i en uppgift ska det framgå av prestationen. I lösningar av uppgifter som kräver analys räcker det inte enbart med ett svar som erhållits med hjälp av räknaren utan övriga motiveringar. Däremot räcker ett svar som examinanden fått med räknaren i allmänhet i rutinberäkningar. Detsamma gäller rutinmässiga delar av mera omfattande uppgifter. Exempel på sådana är omskrivning av uttryck, ekvationslösning och derivering och integrering av funktioner.

1. a) $2x^2 = x \Leftrightarrow 2x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(2x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 2x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \tfrac{1}{2}.$

b) $\dfrac{a^2-b^2}{a-b} = \dfrac{(a-b)(a+b)}{a-b} = a+b = 1 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2}.$

c) $\dfrac{x}{3} = \dfrac{x-1}{4} \Leftrightarrow 4x = 3x - 3 \Leftrightarrow x = -3.$

2. a) Vid y-axeln är $x = 0.$ Vi får $-5y = 4 \Leftrightarrow y = -\tfrac{4}{5}$. Skärningspunkten är $\left(0, -\tfrac{4}{5}\right).$

b) $4x^3 = 48 \Leftrightarrow x^3 = \tfrac{48}{4} = 12,$ dvs. $x = \sqrt[3]{12} \approx 2{,}289.$

c) $2 \cdot 3^x = 162 \Leftrightarrow 3^x = 81 = 3^4 \Leftrightarrow x = 4.$

3. a) Hypotenusans längd är $\sqrt{5,0^2+8,0^2}=\sqrt{89,0}\approx 9,4$ centimeter. För den ena spetsiga vinkeln α gäller $\tan\alpha=\frac{5}{8}$, vilket ger $\alpha\approx 32^\circ$. Den andra spetsiga vinkeln är $90^\circ-32^\circ=58^\circ$.

b) Genom att i ekvationen $\dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{5}{2}$ multiplicera korsvis får vi

$2x+2y=5x-5y$, vilket ger $-3x=-7y$. Vi får $\dfrac{x}{y}=\dfrac{7}{3}$.

4. Anta att kantens längd i början är $2a$, varvid kubens volym är $V=(2a)^3=8a^3$ och dess area $A=6(2a)^2=24a^2$. Den halverade kantens längd är a.

a) Den nya volymen är $V_u=a^3$. Förhållandet mellan volymerna är

$\dfrac{V_u}{V}=\dfrac{a^3}{8a^3}=\dfrac{1}{8}=0{,}125$, vilket ger $V_u=0{,}125V$, dvs. volymen har minskat med 87,5 %.

b) Den nya arean är $A_u=6a^2$. Förhållandet mellan areorna är

$\dfrac{A_u}{A}=\dfrac{6a^2}{24a^2}=\dfrac{1}{4}=0{,}25$, dvs. arean har minskat med 75 %.

5. Vi gör en tabell över de olika delarnas volymer då vi tillsätter x liter mousserande vin.

	jordgubbssaft (l)	mousserande vin (l)	totalt (l)
blandning 1	1,2	2,8	4,0
tillskott	0	x	x
blandning 2	1,2	2,8+x	4,0+x

Det ska finnas $0{,}2\cdot(4{,}0+x)$ liter jordgubbssaft i den andra blandningen. Vi löser ekvationen $0{,}2\cdot(4{,}0+x)=1{,}2 \Leftrightarrow 4{,}0+x=6{,}0 \Leftrightarrow x=2{,}0$. Vi ska tillsätta 2,0 liter mousserande vin.

6. Om det finns k kaniner och f fasaner i buren gäller

$$\begin{cases} k+f=35 \\ 4k+2f=94 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=12 \\ f=23. \end{cases}$$

Det finns 12 kaniner och 23 fasaner i buren.

7. En stock har diametern $2r$ = 20 cm, dvs. stockens radie är r = 10 cm. Längden av varje rak del av vajern är $2r$. De böjda delarna är cirkelbågar, och mot varje cirkelbåge svarar en 60° medelpunktsvinkel. Deras sammanlagda längd är hela omkretsen av en cirkel. Den totala längden av vajern är då

$$6 \cdot 2r + 2\pi r = 120 + 20\pi \approx 183 \text{ centimeter.}$$

8. Efter skede k finns det $\left(1+3+3^2+\cdots+3^{k-1}\right)\cdot 100$ euro på kontot. Detta är en geometrisk summa $100\sum_{n=1}^{k} 3^{n-1}$, vars värde är

$$100\frac{1\cdot(1-3^k)}{1-3} = 50\left(3^k-1\right).$$

Värdet överskrider Finlands budget när $50\left(3^k-1\right) > 54{,}1\cdot 10^9$. Vi får villkoret $3^k > 1{,}082\cdot 10^9 + 1$, som uppfylls för värdena $k > \dfrac{\lg\left(1{,}082\cdot 10^9+1\right)}{\lg 3} \approx 18{,}9$.

Budgeten överskrids efter det 19:e skedet.

9. Det finns sex olika möjliga sedelköer. Av dessa är endast köerna (5, 5, 10, 10) och (5, 10, 5, 10) gynnsamma. Den efterfrågade sannolikheten är $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

10. a) Funktionen $f(x)$ har ett minsta värde endast om $a > 0$. Det minsta värdet får vi i nollstället till derivatan $f'(x)$. Eftersom $f'(x) = 2ax - 4 = 0$ i punkten $x = \frac{2}{a}$, är det minsta värdet $f\left(\frac{2}{a}\right) = 8 - \frac{4}{a}$. Det minsta värdet är noll när $a = \frac{1}{2}$.

b) Villkoret kan uppfyllas endast när $b < 0$ och nollställena till funktionen $g(x)$ är -2 och 1. Eftersom $g(1) = b + 4$, får vi villkoret $b = -4$. Med detta värde är även $g(-2) = 0$, vilket betyder att $b = -4$ är den efterfrågade koefficienten.

11. Iterering:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 1\\
x_2 &\approx 3,666666667\\
x_3 &\approx 2,667584940\\
x_4 &\approx 2,199974562\\
x_5 &\approx 2,086498753\\
x_6 &\approx 2,080103525\\
x_7 &\approx 2,080083823\\
x_8 &\approx 2,080083823 \approx x_7.
\end{aligned}
$$

Svaret är $n = 7.$

12. Eftersom $T = -\lg p$ är $p = 10^{-T}.$

a) När $p_{alko} = 10^{-3,8} \approx 0,00016$ och $p_{olycka} = 10^{-3,4} \approx 0,00040 > p_{alko},$ är sannolikheten för död på grund av olycka större.

b) Eftersom $p_{skada} = 10^{-3,2},$ är antalet skadade $5,4 \cdot 10^6 \cdot 10^{-3,2} \approx 3400.$

13. a) Tangentens riktningskoefficient är $y'(x) = -3x^2 + 2x + 3$ och i dess maximiställe är $y''(x) = -6x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}.$ Ett teckenschema stöder det faktum att det är frågan om ett maximiställe. Eftersom $y\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{29}{27},$ är den efterfrågade punkten $\left(\frac{1}{3}, \frac{29}{27}\right).$

b) Tangentens riktningskoefficient är $y'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{10}{3}$ och tangentens ekvation

$$y - \frac{29}{27} = \frac{10}{3}\left(x - \frac{1}{3}\right) \text{ dvs. } y = \frac{10}{3}x - \frac{1}{27}.$$

14. a) Enligt prognosen är $y = a(x - 2014) + b.$ Utgående från de givna uppgifterna får vi ekvationsparet

$$\begin{cases} y(2014) = b = 607\,417 \\ y(2018) = 4a + b = 629894, \end{cases} \text{ ur vilket } \begin{cases} a = 5619,25 \\ b = 607\,417. \end{cases}$$

b) Ökningen av invånarantalet är

$$y(2030) - y(2014) = 16a + b - b = 16a = 89908 \approx 90\,000.$$

c) Ritad graf.

15.a) $\tan\gamma = 1 \Leftrightarrow \gamma = 45^\circ + n\cdot 180^\circ,\ n \in \mathbf{Z}$. I intervallet $0^\circ \le \gamma \le 360^\circ$ finns två lösningar, $\gamma = 45^\circ$ och $\gamma = 225^\circ$.

b) Utgående från figuren är $\tan\alpha = \frac{1}{3}$ och $\tan\beta = \frac{1}{2}$, dvs.

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}} = 1.$$

Då är $\alpha + \beta = 45^\circ = \gamma$.

Preliminär poängbedömning

1. a)	$2x^2 = x \Leftrightarrow 2x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(2x-1) = 0$	1
	$x = 0 \vee 2x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{1}{2}$	1
	ELLER:	
	$2x^2 = x \Leftrightarrow 2x^2 - x = 0$ och insättning i rotformeln: $x = \frac{1 \pm \sqrt{1-0}}{4}$,	1
	från vilket $x = \frac{1 \pm 1}{4} = \begin{cases} 0 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$	1
	Ledvis division med *x* och bara fått roten $\frac{1}{2}$	1
b)	Direkt insättning: $\frac{a^2 - b^2}{a - b} = \frac{1 - \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{2}}$	1
	Förenklat: $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{1} = \frac{3}{2}$	1
	ELLER:	
	Täljaren indelad i faktorer: $\frac{a^2 - b^2}{a - b} = \frac{(a-b)(a+b)}{a-b}$	1
	Förkortat, insatt och fått: $a + b = 1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$	1
	Som svar godkänns även $\frac{6}{4}$	
c)	Vi avlägsnar nämnarna: $\frac{x}{3} = \frac{x-1}{4} \Leftrightarrow 4x = 3(x-1)$**,**	1
	från vilket $4x = 3x - 3 \Leftrightarrow x = -3$	1

2. **a)**	På y-axeln är $x = 0$. Då är $-5y = 4$,	1
	som ger $y = -\frac{4}{5}$, dvs. skärningspunkten är $\left(0, -\frac{4}{5}\right)$	1
b)	$4x^3 = 48 \Leftrightarrow x^3 = \frac{48}{4} = 12$,	1
	vilket ger $x = \sqrt[3]{12} = 2{,}2894... \approx 2{,}289$	1
	Noggrannhetsfel i närmevärdet	–1
c)	$2 \cdot 3^x = 162 \Leftrightarrow 3^x = 81$	1
	Eftersom $81 = 3^4$, får vi $x = 4$.	1
	ELLER med logaritmer**:**	
	$\lg 2 + x \lg 3 = \lg 162$,	1
	vilket ger $x = \dfrac{\lg 162 - \lg 2}{\lg 3} = 4$	1

3. **a)**	Anta att hypotenusan är c och de spetsiga vinklarna α och β. c $= \sqrt{5{,}0^2 + 8{,}0^2} = \sqrt{89{,}0} = 9{,}4339... \approx 9{,}4$ (= 94 mm)	1
	$\tan \alpha = \frac{5}{8} \Rightarrow \alpha = 32{,}0053...^\circ \approx 32^\circ$	1
	Den andra spetsiga vinkeln är därmed $\beta \approx 90^\circ - 32^\circ \approx 58^\circ$	1
b)	Korsvis multiplikation: $\dfrac{x+y}{x-y} = \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow 2(x+y) = 5(x-y)$,	1
	vilket ger $2x + 2y = 5x - 5y \Leftrightarrow 3x = 7y$	1
	och vidare $x = \dfrac{7y}{3}$, varvid $\dfrac{x}{y} = \dfrac{7}{3}$	1
	ELLER genom att beräkna förhållandet $\frac{x}{y}$ direkt**:**	
	Förenkling: $\dfrac{x + y^{(y}}{x-y} = \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\frac{x}{y}+1}{\frac{x}{y}-1} = \dfrac{5}{2}$	1
	$\Leftrightarrow 2\frac{x}{y} + 2 = 5\frac{x}{y} - 5 \Leftrightarrow 3\frac{x}{y} = 7$	1
	$\Leftrightarrow \dfrac{x}{y} = \dfrac{7}{3}$	1

4.	Anta att kantens längd i början är $2a$, varvid kubens volym är $V=(2a)^3=8a^3$ och arean $A=6(2a)^2=24a^2$. Den halverade kantens längd är a.	1
a)	Den nya volymen $V_u=a^3$. Jämförelse: $\frac{V_u}{V}=\frac{a^3}{8a^3}=\frac{1}{8}=0{,}125$	1
	$=1-0{,}875$, dvs. volymen har minskat med 87,5 %.	1
b)	Den nya arean $A_u=6a^2$. Jämförelse: $\frac{A_u}{A}=\frac{6a^2}{24a^2}=\frac{1}{4}=0{,}25$	1+1
	$=1-0{,}75$, dvs. arean har minskat med 75 %.	1
	Beräknat helt numeriskt, exempelvis: Kantens längd är i början 2 och i slutet 1 …	max 3

<table>
<tr><td>5.</td><td>
<table>
<tr><td></td><td>jordgubbssaft (l)</td><td>mouss.vin (l)</td><td>totalt (l)</td></tr>
<tr><td>blandning 1</td><td>1,2</td><td>2,8</td><td>4,0</td></tr>
<tr><td>blandning 2</td><td>0</td><td>x</td><td>x</td></tr>
<tr><td>ny blandning</td><td>1,2</td><td>$2{,}8+x$</td><td>$4{,}0+x$</td></tr>
</table>
eller utgångsdata presenterat på annat sätt</td><td>3</td></tr>
<tr><td></td><td>Villkor: $0{,}2\cdot(4{,}0+x)=1{,}2$,</td><td>2</td></tr>
<tr><td></td><td>vilket ger $4{,}0+x=6 \Leftrightarrow x=2{,}0$. Man ska alltså tillsätta 2,0 l mousserande vin.</td><td>1</td></tr>
</table>

6.	I buren finns k kaniner och f fasaner. Villkor: $\begin{cases} k+f=35 \\ 4k+2f=94 \end{cases}$	3
	$\Leftrightarrow \begin{cases} k=12 \\ f=23 \end{cases}$.	2
	Svar: Kaninerna är 12 och fasanerna 23 till antalet.	1

7.	Diametern av en stock 2r = 20 cm, dvs. stockens radie är r = 10 cm.	1
	Varje rak del av vajern = 2r.	1
	De böjda delarna är delar av cirkelbågar, vilkas medelpunktsvinkel $=60^\circ$. [Bågarnas sammanlagda längd = omkretsen av en hel cirkel.]	1
	Vajerns totala längd är därmed $6\cdot 2r+2\pi r=$	1
	$120+20\pi$	1
	$=182{,}8318...\approx 183$ (cm)	1
	Noggrannhetsfel i närmevärdet	–1

8.	Alla penningbelopp nedan är uttryckta i euro. Efter skede k finns det på kontot $\left(1+3+3^2+...+3^{k-1}\right)\cdot 100$.	1
	Uttrycket i parentesen är en geometrisk summa $\sum a_n$, där $a_1=1,\ q=3,\ n=k$.	1
	Hela summan är då $\dfrac{1\cdot(1-3^k)}{1-3}\cdot 100=50\left(3^k-1\right)$,	1
	som överskrider Finlands budget, när $50\left(3^k-1\right)>54{,}1\cdot 10^9$.	1
	Därmed gäller $3^k>1{,}082\cdot 10^9+1$,	1
	vilket ger $k>\dfrac{\lg(1{,}082\cdot 10^9+1)}{\lg 3}=18{,}93...$. Budgeten överskrids alltså efter det 19:e skedet	1

9.	Det finns 6 olika möjliga sedelköer: (5,5,10,10), (5,10,5,10,), (5,10,10,5), (10,10,5,5), (10,5,10,5) och (10,5,5,10).	2
	Av dessa sedelköer är endast de två första gynnsamma.	2
	Den efterfrågade sannolikheten är därmed $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.	2

10. a)	Funktionen $y=f(x)$ har ett minsta värde endast då $a>0$, dvs. då funktionens graf är en uppåtvänd parabel.	1
	Vi får det minsta värdet i nollstället till $f'(x)$. Då är $f'(x)=2ax-4=0$, som uppfylls då $x=\frac{2}{a}$.	1
	Det minsta värdet: $f = f\left(\frac{2}{a}\right)=8-\frac{4}{a}$. Det minsta värdet är 0, då $a=\frac{1}{2}$.	1
b)	Villkoret kan endast uppfyllas då $b<0$, dvs. då grafen av funktionen $g(x)$ är en nedåtvänd parabel.	1
	Dessutom måste nollställena till $g(x)$ vara -2 och 1.	1
	Genom att sätta in dessa värden för x får vi: $4b+16=b+4=0$, ur vilket följer att $b=-4$.	1

11.	Vi sätter in $x_1 = 1$ och $a = 9$ i formeln. Vi får $x_2 = \frac{1}{3}\left(2x_1 + \frac{9}{x_1^{\,2}}\right)$	2
	$= \frac{11}{3} = 3{,}666666666\ldots$	1
	Genom att fortsätta enligt samma princip får vi $x_3 = 2{,}667584940...$ $x_4 = 2{,}199974562...$ $x_5 = 2{,}086498753...$ $x_6 = 2{,}080103525...$ $x_7 = 2{,}080083823...$ $x_8 = 2{,}080083823... \approx x_7$	2
	Svaret är därmed $n = 7$.	1

12. a)	Från formeln $T = -\lg p$ löser vi ut sannolikheten $p = 10^{-T}$.	1
	$p_{alko} = 10^{-3{,}8} = 0{,}000158...$	1
	$p_{olycka} = 10^{-3{,}4} = 0{,}000398... > p_{alko}$	1
b)	Eftersom $p_{skada} = 10^{-3{,}2}$,	1
	Är antalet skadade $= 10^{-3{,}2} \cdot 5{,}4 \cdot 10^{6}$	1
	$= 3407{,}16... \approx 3400$	1
	Fel noggrannhet i svaret	–1

13. a)	Riktningskoefficienten för tangenten är störst i derivatan y':s maximipunkt, dvs. i den punkt där $y'' = 0$. $y = -x^3 + x^2 + 3x$ $\Rightarrow y' = -3x^2 + 2x + 3 \Rightarrow y'' = -6x + 2$	1
	$y'' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$. Ett teckenschema visar att det är fråga om ett maximiställe.	1
	Vi får $y = y\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{29}{27}$. Den efterfrågade punkten är alltså $\left(\frac{1}{3}, \frac{29}{27}\right)$.	1
b)	Tangentens riktningskoefficient är $y'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{10}{3}$	1
	och ekvation $y - \frac{29}{27} = \frac{10}{3}\left(x - \frac{1}{3}\right)$,	1
	dvs. $y = \frac{10}{3}x - \frac{1}{27}$ eller $90x - 27y - 1 = 0$.	1

14. **a)**	Modell: $y=a(x-2014)+b$ Villkor: $\begin{cases} y(2014)=b=607\,417 \\ y(2018)=4a+b=629894 \end{cases}$,	1
	vilket ger $\begin{cases} a=5619,25 \\ b=607\,417 \end{cases}$.	1
b)	Invånarantalets ökning är $y(2030)-y(2014)=16a+b-b=16a$	1
	$=89908\approx 90000$ (invånare)	1
c)	Grafen är den del av linjen $y=5619,25(x-2014)+607417$ $\Leftrightarrow y=5619,25x-10709752,5$	1
	som ligger i intervallet $2014\leq x\leq 2030$	1
	Linjen fortsätter utanför definitionsintervallet	–1

15. **a)**	$\tan\gamma=1 \Leftrightarrow \gamma=45^\circ+n\cdot 180^\circ,\ n\in\mathbf{Z}$.	1
	Vinklarna i intervallet $0^\circ\leq\gamma\leq 360^\circ$ är 45° och 225°.	1+1
b)	Ur figuren: $\tan\alpha=\frac{1}{3}$, $\tan\beta=\frac{1}{2}$.	1
	Med formeln: $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}=\dfrac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}=1$,	1
	vilket ger att $\alpha+\beta=45^\circ=\gamma$.	1