Ylioppilastutkintolautakunta
Studentexamensnämnden

MATEMATIKPROV, LÅNG LÄROKURS 19.3.2014
BESKRIVNING AV GODA SVAR

De beskrivningar av svarens innehåll och poängsättningar som ges här är inte bindande för studentexamensnämndens bedömning. Censorerna beslutar om de kriterier som används i den slutgiltiga bedömningen.

Av en god prestation framgår det hur examinanden har kommit fram till svaret. I lösningen måste det finnas nödvändiga uträkningar eller andra tillräckliga motiveringar och ett slutresultat. I bedömningen fästs uppmärksamhet vid helheten och vid de tre stegen start, mellansteg och slutresultat. Räknefel som inte väsentligt ändrar uppgiftens natur ger ingen betydande sänkning av antalet poäng. Räknefel och fel i den matematiska modellen som ändrar uppgiftens natur kan däremot sänka antalet poäng avsevärt.

I provet är räknaren ett hjälpmedel, och dess roll bedöms separat för varje uppgift. Om symbolräknare använts i en uppgift ska det framgå av prestationen. I lösningar av uppgifter som kräver analys räcker det inte enbart med ett svar som erhållits med hjälp av räknaren utan övriga motiveringar. Däremot räcker ett svar som examinanden fått med räknaren i allmänhet i rutinberäkningar. Detsamma gäller rutinmässiga delar av mera omfattande uppgifter. Exempel på sådana är omskrivning av uttryck, ekvationslösning och derivering och integrering av funktioner.

1. a) $7(x-3)+1=x^2-1-(x^2-1) \Leftrightarrow 7x-21+1=0 \Leftrightarrow 7x=20 \Leftrightarrow x=\frac{20}{7}.$

b) Positivitetskravet är $x(5-8x)>0.$ Nollställena för uttrycket i vänstra ledet är $x=0 \vee x=\frac{5}{8}$. Enligt ett teckenschema uppfylls villkoret då $0<x<\frac{5}{8}$.

c) $$\frac{a^2-b^2}{a-b}+\frac{a^2-b^2}{a+b}=\frac{(a-b)(a+b)}{a-b}+\frac{(a-b)(a+b)}{a+b}=(a+b)+(a-b)=2a.$$

2. Tabellen är

$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$
4	1	3

3. a) Vi får arean genom att integrera differensen $6x^2+3x^4+\frac{1}{x}-3x^4=6x^2+\frac{1}{x}$, varvid den efterfrågade arean är

$$\int_1^2\left(6x^2+\frac{1}{x}\right)dx=\Big/_{1}^{2}\left(2x^3+\ln|x|\right)=14+\ln 2\approx 14{,}69.$$

b) $g'(x)=\frac{1}{2}\cdot f'(2x)\cdot 2=f'(2x)$. Eftersom $f'(x)=3x^2-3$ är $g'(x)=3(2x)^2-3=12x^2-3$. Alltså är $g'(1)=12-3=9$.

4. Om $a=0$ har ekvationen formen $-5x+2=0$, som har exakt en lösning. Om $a\neq 0$, är ekvationen en andragradsekvation, och den har exakt en lösning när diskriminanten $D=25-8a=0$, dvs. då $a=\frac{25}{8}$.

5. Ekvationen för normalen till linjen $3x-4y=0$ som går genom punkten (8,6) är $y-6=-\frac{4}{3}(x-8)\Leftrightarrow x=-\frac{3}{4}y+\frac{25}{2}$. Cirkelns medelpunkt ligger på normalen. Om cirkelns radie är r, så måste medelpunkten $\left(-\frac{3}{4}r+\frac{25}{2},r\right)$ ha avståndet r till den ursprungliga linjen. Vi får då villkoret

$$\frac{\left|-\frac{9}{4}r+\frac{75}{2}-4r\right|}{\sqrt{9+16}}=r\ \Leftrightarrow\left|-\frac{25}{4}r+\frac{75}{2}\right|=5r\ \Leftrightarrow -25r+150=\pm 20r\Leftrightarrow r=\frac{10}{3}\vee r=30.$$

I fallet $r=30$ tangerar cirkeln den negativa x-axeln. Den efterfrågade radien är alltså $\frac{10}{3}$ och medelpunkten $\left(10,\frac{10}{3}\right)$.

6. Anta att $f(x)=\sum_{k=1}^{n}(x-a_k)^2$, varvid $f'(x)=2\sum_{k=1}^{n}(x-a_k)=2\left(nx-\sum_{k=1}^{n}a_k\right)$. Derivatans nollställe är $x=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k$. Det är frågan om ett minimiställe, eftersom grafen av funktionen f är en uppåtvänd parabel.

7. Vi gör en tabell över alla möjliga summor av ögontal:

6	7	8	9	10
5	6	7	8	9
4	5	6	7	8
3	4	5	6	7
2	3	4	5	6
1	2	3	4	5
	1	**2**	**3**	**4**

Det totala antalet utfall är $6 \cdot 4 = 24$.

a) Med stöd av tabellen får vi sannolikheterna:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X=n)$	1/24	2/24	3/24	4/24	4/24	4/24	3/24	2/24	1/24

b) Summans väntevärde är

$$\frac{1}{24}(1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 5+4\cdot 6+4\cdot 7+3\cdot 8+2\cdot 9+1\cdot 10)=6.$$

Väntevärdet kan också beräknas på följande sätt: väntevärdet för ögontalet för en vanlig tärning är 3,5 och väntevärdet för ögontalet för en tetraedertärning är 2,5. Det efterfrågade väntevärdet är summan av dessa väntevärden.

8. Strålarna skär varandra om ekvationen $\overrightarrow{OA}+s\bar{u}=\overrightarrow{OB}+t\bar{v}$ uppfylls för något par $s>0,\ t>0.$ Då är

$$(1+2s)\bar{i}+(-2-s)\bar{j}+(3-3s)\bar{k}=(9-t)\bar{i}+(-1-2t)\bar{j}+(-12+3t)\bar{k}.$$

Genom att jämföra komponenterna får vi ekvationssystemet

$$\begin{cases}1+2s=9-t\\ -2-s=-1-2t\\ 3-3s=-12+3t.\end{cases}$$

Ur de två första ekvationerna löser vi ut $t=2$ och $s=3.$ Vi märker att också den tredje ekvationen uppfylls för dessa värden. Då skär strålarna varandra och skärningspunkten är $(7,-5,-6).$

9. a) Vi får som skärningspunkter $A=(6,0,0)$, $B=(0,3,0)$ och $C=(0,0,2)$. Då är triangeln OAB tetraederns basyta, och sträckan OC tetraederns höjd . Kanternas längder är $OA=6$, $OB=3$ och $OC=2$. Tetraederns volym är

$$\tfrac{1}{3}\cdot\frac{OA\cdot OB}{2}\cdot OC=\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{6\cdot3}{2}\cdot 2=6.$$

b) Vektorerna $\bar{u}=\overrightarrow{AB}=-6\bar{i}+3\bar{j}$ och $\bar{v}=\overrightarrow{AC}=-6\bar{i}+2\bar{k}$ är två sidor i triangeln. För vinkeln φ mellan dessa sidor gäller

$$\cos\varphi=\frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{|\bar{u}|\cdot|\bar{v}|}=\frac{36}{\sqrt{45}\sqrt{40}}=\frac{6}{\sqrt{50}}.$$

Anta att h är den av triangelns höjder som utgår från hörnpunkten C.

Eftersom $\sin\varphi=\dfrac{h}{|\bar{v}|}$, är

$$h=\sqrt{40}\sin\varphi=\sqrt{40}\sqrt{1-\frac{36}{50}}=2\sqrt{\frac{14}{5}}.$$

Arean av triangeln ABC är $\dfrac{1}{2}|\bar{u}|h=3\sqrt{14}.$

10. Ostbitens tvärsnitt vid den lodräta linjen $x=t$ är en rektangel vars bas är $2a=2\sqrt{r^2-t^2}$. Rektangelns höjd H får vi med likformighet: $\dfrac{H}{t}=\dfrac{h}{r}$

$\Leftrightarrow H=\frac{h}{r}t.$ Tvärsnittets area är

$A(t)=2a\cdot H=\frac{2h}{r}t\sqrt{r^2-t^2}$, $0\le t\le r.$ Ostbitens volym är

$$\int_0^r A(t)dt=-\frac{h}{r}\int_0^r(-2t)\left(r^2-t^2\right)^{\frac{1}{2}}dt=-\frac{h}{r}\Big/_0^r\frac{\left(r^2-t^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}=\tfrac{2}{3}r^2h.$$

11. a) $f'(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le 1\\ 1, & 1\le x\le 2\\ -x+3, & 2\le x\le 4.\end{cases}$

b) Genom integrering får vi $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2+C_1, & 0\le x\le 1\\ x+C_2, & 1\le x\le 2\\ -\frac{1}{2}x^2+3x+C_3, & 2\le x\le 4.\end{cases}$

Eftersom $f(0)=0$ och integralfunktionen är kontinuerlig är

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_1 + \frac{1}{2} = C_2 + 1 \\ C_2 + 2 = C_3 + 4. \end{cases}$$

Vi får som lösning $C_1 = 0,\ C_2 = -\frac{1}{2}$ och $C_3 = -\frac{5}{2}$. Då är

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & 0 \le x \le 1 \\ x - \frac{1}{2}, & 1 \le x \le 2 \\ -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{5}{2}, & 2 \le x \le 4. \end{cases}$$

c) Funktionen f är deriverbar i intervallet $0 < x < 4$ och $f'(x) = 0$ endast när $x = 3.$ Möjliga extremställen i intervallet $0 \le x \le 4$ är alltså 0, 3 och 4. Eftersom $f(0) = 0,$ $f(3) = 2$ och $f(4) = \frac{3}{2}$ är funktionens största värde 2 och minsta värde 0.

12. Närmevärden för derivatan med räknaren TI-86:

p	**närmevärde**	**absoluta felet**
3	0,87734270288	$2,4 \cdot 10^{-4}$
4	0,8775585892	$2,4 \cdot 10^{-5}$
5	0,877580165	$2,4 \cdot 10^{-6}$
6	0,87758232	$2,4 \cdot 10^{-7}$
7	**0,8775826**	$3,8 \cdot 10^{-8}$
8	0,877583	$4,4 \cdot 10^{-7}$
9	0,87759	$7,4 \cdot 10^{-6}$
10	0,8776	$1,7 \cdot 10^{-5}$
$\cos(0,5)$	0,87758256189	

Värdet $p = 7$ ger det bästa närmevärdet. Det rätta svaret kan vara beroende av den räknare som används.

13. a) Det är frågan om en aritmetisk summa vars värde är

$$(k+1)\frac{n+(n+k)}{2}=\tfrac{1}{2}(k+1)(2n+k).$$

Vi får alltså ekvationen $\frac{1}{2}(k+1)(2n+k)=1007 \Leftrightarrow (k+1)(2n+k)=2014.$

b) $2014=2\cdot 1007=2\cdot 19\cdot 53.$

c) Med stöd av de föregående deluppgifterna kan uttrycket $k+1$ anta värdena $1, 2, 19, 53,\ 2\cdot 19,\ 2\cdot 53,\ 19\cdot 53$ och $2\cdot 19\cdot 53.$

Genom att undersöka alla alternativ märker vi att endast följande uppdelningar i faktorer ger positiva heltalslösningar.

$$2014=2\cdot 1007,\ \text{när}\ \begin{cases}k+1=2\\ 2n+k=1007\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=1\\ n=503\end{cases}$$

$$2014=38\cdot 53,\ \text{när}\ \begin{cases}k+1=38\\ 2n+k=53\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=37\\ n=8\end{cases}$$

$$2014=19\cdot 106,\ \text{när}\ \begin{cases}k+1=19\\ 2n+k=106\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=18\\ n=44.\end{cases}$$

14. a) Kurvan som ritas utgörs av två cirkelbågar. Cirkelns radie är längden av triangelns sida $\frac{p}{3}$, och storleken av den medelpunktsvinkel som svarar mot bågen är $\frac{2\pi}{3}$. Den efterfrågade längden är $2\cdot\frac{2\pi}{3}\cdot\frac{p}{3}=\frac{4\pi}{9}p.$

b) Ritade figurer.

c) Den efterfrågade kurvan utgörs av tre cirkelbågar av vilka den första och den tredje är lika långa. Den första cirkelbågens radie har samma längd som kvadratens sida $\frac{p}{4}$ och den andra cirkelbågens radie har samma längd som kvadratens diagonal $\frac{p}{4}\cdot\sqrt{2}$. Medelpunktsvinkeln som svarar mot varje båge är $\frac{\pi}{2}$. Den efterfrågade längden är $2\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{p}{4}+\frac{\pi}{2}\cdot\frac{p}{4}\cdot\sqrt{2}=\frac{(2+\sqrt{2})\pi}{8}p.$

d) Den efterfrågade kurvan utgörs av fem cirkelbågar av vilka den första och den femte respektive den andra och den fjärde är lika långa. Den första cirkelbågens radie har samma längd som sexhörningens sida $\frac{p}{6}$, den andra cirkelbågen har en radie som har samma längd som sexhörningens kortare diagonal $\frac{p\sqrt{3}}{6}$ och den tredje har en radie som har samma längd som sexhörningens längre diagonal $\frac{p}{3}$. Medelpunktsvinkeln som svarar mot varje båge är $\frac{\pi}{3}$. Den efterfrågade längden är

$$2\cdot\frac{\pi}{3}\cdot\frac{p}{6}+2\cdot\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}p+\frac{\pi}{3}\cdot\frac{p}{3}=\frac{(1+\sqrt{3}+1)\pi}{9}p=\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)\pi}{9}p.$$

15. a) Eftersom $g_0(x)=1,\ g_0 * f_1 = \int_{-1}^{1} 1\cdot x\,dx = 0$ och $g_0 * g_0 = \int_{-1}^{1} 1\cdot 1dx = 2,$ är

$$g_1(x) = x - \frac{0}{2}\cdot 1 = x.$$ Eftersom $g_0 * f_2 = \int_{-1}^{1} 1\cdot x^2\,dx = \tfrac{2}{3},$

$g_1 * f_2 = \int_{-1}^{1} x\cdot x^2\,dx = 0$ och $g_1 * g_1 = \int_{-1}^{1} x\cdot x\,dx = \tfrac{2}{3},$ är

$$g_2(x) = x^2 - \frac{\tfrac{2}{3}}{2}\cdot 1 - \frac{0}{\tfrac{2}{3}}x = x^2 - \tfrac{1}{3}.$$

b) Eftersom $g_0 * g_1 = \int_{-1}^{1} x\,dx = 0,\ g_0 * g_2 = \int_{-1}^{1} (x^2 - \tfrac{1}{3})\,dx = \tfrac{2}{3} - \tfrac{2}{3} = 0$ och

$$g_1 * g_2 = \int_{-1}^{1} x(x^2 - \tfrac{1}{3})\,dx = \int_{-1}^{1}\left(x^3 - \tfrac{1}{3}x\right)dx = \Big/_{-1}^{1}\left(\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{6}x^2\right) = \tfrac{1}{12} - \tfrac{1}{12} = 0,$$

gäller ortogonalitet.

c) Vi beräknar de skalära produkterna:

$$h * g_0 = \int_{-1}^{1}\left(x^3 + ax^2 + bx + c\right)dx = \Big/_{-1}^{1}\left(\tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{a}{3}x^3 + \tfrac{b}{2}x^2 + cx\right) = \tfrac{2}{3}a + 2c,$$

$$h * g_1 = \int_{-1}^{1}\left(x^3 + ax^2 + bx + c\right)xdx = \int_{-1}^{1}\left(x^4 + ax^3 + bx^2 + cx\right)dx$$

$$= \Big/_{-1}^{1}\left(\tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{a}{4}x^4 + \tfrac{b}{3}x^3 + \tfrac{c}{2}x^2\right) = \frac{2}{5} + \frac{2}{3}b,$$

$$h * g_2 = \int_{-1}^{1}\left(x^3 + ax^2 + bx + c\right)\left(x^2 - \tfrac{1}{3}\right)dx$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(x^5 + ax^4 + (b - \tfrac{1}{3})x^3 + (c - \tfrac{a}{3})x^2 - \tfrac{b}{3}x - \tfrac{c}{3}\right)dx$$

$$= \Big/_{-1}^{1}\left(\tfrac{1}{6}x^6 + \tfrac{a}{5}x^5 + \tfrac{3b-1}{12}x^4 + \tfrac{3c-a}{9}x^3 - \tfrac{b}{6}x^2 - \tfrac{c}{3}x\right)$$

$$= \frac{2a}{5} + \frac{6c-2a}{9} - \frac{2c}{3} = \frac{8}{45}a.$$

Funktionerna är ortogonala när $\frac{2}{3}a + 2c = \frac{2}{5} + \frac{2}{3}b = \frac{8}{45}a = 0,$ ur vilket $a = c = 0$ och $b = -\frac{3}{5}.$

Preliminär poängbedömning

1. a)	$7(x-3)+1=x^2-1-(x^2-1) \Leftrightarrow 7x-21+1=0$	1
	$\Leftrightarrow 7x=20 \Leftrightarrow x=\frac{20}{7}$	1
b)	Villkor: $x(5-8x)>0$. Nollställena för uttrycket i vänstra ledet: $x=0 \vee 5-8x=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=\frac{5}{8}$.	1
	Eftersom grafen för uttrycket är en nedåtvänd parabel uppfylls vill-koret då $0<x<\frac{5}{8}$.	1
c)	Faktorisering: $\dfrac{a^2-b^2}{a-b}+\dfrac{a^2-b^2}{a+b}=\dfrac{(a-b)(a+b)}{a-b}+\dfrac{(a-b)(a+b)}{a+b}$,	1
	genom förkortning**:** $(a+b)+(a-b)=2a$	1

2.	Funktion	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$	a´ 2
	Derivata	4	1	3	

3. a)	Differensen mellan kurvornas uttryck: $y_1-y_2=6x^2+\dfrac{1}{x}$,	1
	varvid den efterfrågade arean är $A=\int_1^2\left(6x^2+\dfrac{1}{x}\right)dx=\Big/_1^2\left(2x^3+\ln\lvert x\rvert\right)$	1
	$=16+\ln 2-2-\ln 1=14+\ln 2=14{,}6931...\approx 14{,}69$.	1
b)	$g(x)=\frac{1}{2}f(2x)=\frac{1}{2}\left((2x)^3-3(2x)\right)=4x^3-3x$,	1
	från vilket följer att $g'(x)=12x^2-3$,	1
	vilket ger $g'(1)=12-3=9$.	1
	ELLER:	
	$g'(x)=\frac{1}{2}\cdot f'(2x)\cdot 2=f'(2x)$	1
	Eftersom $f'(x)=3x^2-3$,	1
	är $g'(1)=f'(2)=12-3=9$.	1

4.	Om $a=0$ får ekvationen formen $-5x+2=0$, som bara har en lösning $\left[x=\frac{2}{5}\right]$.	2
	Om $a\neq 0$, är ekvationen av 2:a graden och den har exakt en lösning då diskriminanten $D=25-8a=0$,	2
	dvs. då $a=\frac{25}{8}$. [då är $x=\frac{4}{5}$]	2

5.	Ekvationen för den normal till linjen *s*: $3x-4y=0 \Leftrightarrow y=\frac{3}{4}x$ som går genom punkten (8,6) är $y-6=-\frac{4}{3}(x-8) \Leftrightarrow x=-\frac{3}{4}y+\frac{25}{2}$.	1
	Den efterfrågade cirkelns radie $=r$. Då måste dess medelpunkt $(-\frac{3}{4}r+\frac{25}{2},r)$ vara på avståndet *r* från linjen *s*.	1
	Vi får villkoret: $\frac{\left\lvert -\frac{9}{4}r+\frac{75}{2}-4r\right\rvert}{\sqrt{9+16}}=r \Leftrightarrow \left\lvert -\frac{25}{4}r+\frac{75}{2}\right\rvert=5r$	1
	$\Leftrightarrow -25r+150=\pm 20r$	1
	$\Leftrightarrow r=\frac{10}{3} \vee r=30$, av vilka det senare värdet inte duger (cirkeln tangerar då den negativa *x*-axeln).	1
	Den efterfrågade radien är alltså $\frac{10}{3}$ och medelpunkten $\left(10,\frac{10}{3}\right)$.	1

6.	Uttrycket $f(x)=\sum_{k=1}^{n}(x-a_k)^2$,	1
	vilket ger $f'(x)=2\sum_{k=1}^{n}(x-a_k)=2\left(nx-\sum_{k=1}^{n}a_k\right)$.	2
	Nollställe: $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k$ [= medelvärdet av konstanterna a_k].	2
	Det är fråga om ett minimiställe eftersom grafen av funktionen $f(x)$ är en uppåtvänd parabel.	1

<table>
<tr><td>7.
a)</td><td>Poängsumman $\underline{x}$ får värdena 2,3,4,…,10. De gynnsamma utfallen för dessa värden är 1,2,3,4,4,4,3,2,1 till antalet. Det totala antalet utfallet är $6 \cdot 4 = 24$ st.
Resultat = $\underline{x}_i$, sannolikhet = p_i. Resultaten i tabellen nedan:
<table>
<tr><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr>
<tr><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td></tr>
<tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr>
<tr><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
</table></td><td>2</td></tr>
<tr><td></td><td>Utgående från tabellen får vi sannolikheterna
<table>
<tr><td>$\underline{x}_i$</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr>
<tr><td>p_i</td><td>1/24</td><td>2/24</td><td>3/24</td><td>4/24</td><td>4/24</td><td>4/24</td><td>3/24</td><td>2/24</td><td>1/24</td></tr>
</table></td><td>1</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Väntevärdet för summan är
$\frac{1}{24}(1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 4 \cdot 6 + 4 \cdot 7 + 3 \cdot 8 + 2 \cdot 9 + 1 \cdot 10)$</td><td>2</td></tr>
<tr><td></td><td>$= 6$</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>ELLER:</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Väntevärdet kan beräknas direkt: $2{,}5 + 3{,}5 = 6{,}0$</td><td>3</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>8.</td><td>Strålarna skär varandra, om $\exists s,t \in \mathbf{R}$: $\overrightarrow{OA} + s\bar{u} = \overrightarrow{OB} + t\bar{v}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>$\Leftrightarrow\ (1+2s)\bar{i} + (-2-s)\bar{j} + (3-3s)\bar{k} = (9-t)\bar{i} + (-1-2t)\bar{j} + (-12+3t)\bar{k}$
.</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>Detta uppfylls då $\begin{cases} 1+2s = 9-t \\ -2-s = -1-2t \\ 3-3s = -12+3t \end{cases}$.</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>De två första ekvationerna ger $\begin{cases} t = 2 \\ s = 3 \end{cases}$,</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>och dessa värden uppfyller också den sista ekvationen, vilket betyder att strålarna skär varandra.</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>Genom att sätta in värdena för s och t får vi skärningspunkten $(7,-5,-6)$.</td><td>1</td></tr>
</table>

9. a)	Genom att nollställa två variabler i taget får vi tetraederns hörnpunkter $O,\ A=(6,0,0),\ B=(0,3,0)$ och $C=(0,0,2)$.	1
	Anta att OAB är tetraederns bas och OC dess höjd. Kanternas längder är $OA=6,\ OB=3$ och $OC=2$.	1
	Då är tetraederns volym $\frac{1}{3}\cdot\frac{OA\cdot OB}{2}\cdot OC=\frac{1}{3}\cdot\frac{6\cdot 3}{2}\cdot 2=6$.	1
b)	Vi använder ΔABC som tetraederns basyta. Eftersom tetraederns volym är $V=\frac{1}{3}Ah$, är basytans area $A=\frac{3V}{h}$.	1
	Vi har beräknat $V=6$. Höjden h är densamma som avståndet från origo till basytan, dvs. $h=\frac{\lvert 0-0-0-6\rvert}{\sqrt{1+4+9}}=\frac{6}{\sqrt{14}}$.	1
	Den efterfrågade arean är därmed $A=\frac{3\cdot 6}{\frac{6}{\sqrt{14}}}=3\sqrt{14}$.	1
	ELLER med kryssprodukt:	
	$\overrightarrow{AB}=-6\bar{i}+3\bar{j}=\bar{u}$ och $\overrightarrow{AC}=-6\bar{i}+2\bar{k}=\bar{v}$	1
	$\bar{u}\times\bar{v}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -6 & 3 & 0\\ -6 & 0 & 2\end{vmatrix}=6\bar{i}+12\bar{j}+18\bar{k}$	1
	$A_{ABC}=\frac{\lvert\bar{u}\times\bar{v}\rvert}{2}=\frac{6\sqrt{1+4+9}}{2}=3\sqrt{14}$	1
	ELLER med skalär produkt	
	$\bar{u}\cdot\bar{v}=36,\ \lvert\bar{u}\rvert=\sqrt{36+9}=3\sqrt{5}$ Vektorn $\bar{v}$:s vektorprojektion på vektorn $\bar{u}$ $\bar{v}_u=\frac{\bar{v}\cdot\bar{u}}{\bar{u}\cdot\bar{u}}\bar{u}$ $=\frac{36}{45}\bar{u}=\frac{4}{5}\bar{u}=-\frac{24}{5}\bar{i}+\frac{12}{5}\bar{j}$.	1
	Den höjdvektor som är vinkelrät mot basen är då $\bar{h}=\bar{v}-\bar{v}_u=-\frac{6}{5}\bar{i}-\frac{12}{5}\bar{j}+2\bar{k}$, ur vilket $\lvert\bar{h}\rvert=\frac{1}{5}\sqrt{36+144+100}=\frac{2}{5}\sqrt{70}$.	1
	Därmed är $A_{ABC}=\frac{\lvert\bar{u}\rvert\lvert\bar{h}\rvert}{2}=\frac{3\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{70}}{2\cdot 5}=3\sqrt{14}$.	1

10.	Vi skär ostbiten med ett plan som är parallellt med basytans diameter på avståndet x från basytans diameter $(0 \le x \le r)$.	1
	Tvärsnittets är en rektangel, vars bas $= 2a$, där $a = \sqrt{r^2 - x^2}$.	1
	Vi får rektangelns höjd H med ekvationen $\frac{H}{x} = \frac{h}{r} \Leftrightarrow H = \frac{h}{r} x$.	1
	Tvärsnittets area: $A(x) = 2a \cdot H = \frac{2h}{r} x\sqrt{r^2 - x^2}$, $0 \le x \le r$.	1
	Ostbitens volym är därmed $\int_0^r A(x)dx = -\frac{h}{r}\int_0^r (-2x)\left(r^2 - x^2\right)^{\frac{1}{2}} dx$	1
	$= -\frac{h}{r} \Big/_0^r \frac{\left(r^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = -\frac{2h}{3r}\left(0 - r^3\right) = \frac{2}{3} r^2 h$.	1

11. a)	Eftersom den brutna linjens första del är en del av linjen $y=x$, den andra delen en del av linjen $y=1$ och den tredje en del av linjen $y=-x+3$,	1
	är derivatafunktionen $f'(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le 1 \\ 1, & 1\le x\le 2 \\ -x+3, & 2\le x\le 4 \end{cases}$	1
b)	Genom integrering får vi: $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2+C_1, & 0\le x\le 1 \\ x+C_2, & 1\le x\le 2 \\ -\frac{1}{2}x^2+3x+C_3, & 2\le x\le 4 \end{cases}$	1
	Då integralfunktionen är kontinuerlig måste $\begin{cases} C_1+\frac{1}{2}=C_2+1 \\ C_2+2=C_3+4 \end{cases}$. Vi betecknar $C_1=C$. Då är $C_2=C-\frac{1}{2}$ och $C_3=C-\frac{5}{2}$. Begynnelsevillkoret $f(0)=0$ ger: $C_1=0, C_2=-\frac{1}{2}$ och $C_3=-\frac{5}{2}$. Därmed är $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & 0\le x\le 1 \\ x-\frac{1}{2}, & 1\le x\le 2 \\ -\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{5}{2}, & 2\le x\le 4 \end{cases}$.	1
c)	Funktionen f är deriverbar i intervallet $0<x<4$ och $f'(x)=0$ endast i punkten $x=3$.	1
	Extremvärdeskandidaterna är därmed: $f(0)=0$, $f(3)=2$ och $f(4)=\frac{3}{2}$, av vilka det största värdet är 2 och det minsta värdet är 0.	1

12.	Vi beräknar derivatans närmevärde med grafräknaren TI-86:	5

p	**uttryck**	**Felets absolutbelopp**
3	0,87734270288	$2,4 \cdot 10^{-4}$
4	0,8775585892	$2,4 \cdot 10^{-5}$
5	0,877580165	$2,4 \cdot 10^{-6}$
6	0,87758232	$2,4 \cdot 10^{-7}$
7	**0,8775826**	$3,8 \cdot 10^{-8}$
8	0,877583	$4,4 \cdot 10^{-7}$
9	0,87759	$7,4 \cdot 10^{-6}$
10	0,8776	$1,7 \cdot 10^{-5}$
$\cos(0,5)$	0,87758256189	

	Värdet $p = 7$ ger det bästa närmevärdet.	1
	Det rätta svaret kan bero på den använda räknaren	

13. a)	Det är fråga om en aritmetisk summa $\sum a_n$, där $a_1 = n,\ a_n = n + k$ och termerna är $k+1$ till antalet. Med summaformeln får vi $S_{k+1} = (k+1)\frac{n+(n+k)}{2} = \frac{1}{2}(k+1)(2n+k)$	1
	Eftersom $\frac{1}{2}(k+1)(2n+k) = 1007$, är $(k+1)(2n+k) = 2014$ v.s.b.	1
b)	$2014 = 2 \cdot 1007$	1
	$= 2 \cdot 19 \cdot 53$	1
c)	Utgående från föregående deluppgifter kan $k+1$ få värdena 1, 2, 19, 53, $2 \cdot 19$, $2 \cdot 53$, $19 \cdot 53$ och $2 \cdot 19 \cdot 53$.	1
	Genom att undersöka alla alternativ observerar vi att endast följande faktoruppdelningar ger positiva heltalslösningar: $2014 = 2 \cdot 1007$, då $\begin{cases} k+1 = 2 \\ 2n+k = 1007 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ n = 503 \end{cases}$ $2014 = 38 \cdot 53$, då $\begin{cases} k+1 = 38 \\ 2n+k = 53 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 37 \\ n = 8 \end{cases}$ $2014 = 19 \cdot 106$, då $\begin{cases} k+1 = 19 \\ 2n+k = 106 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 18 \\ n = 44 \end{cases}$.	1

***14 a)**	Triangelns sida = s. Då är $3s = p \Leftrightarrow s = \frac{p}{3}$. Kurvan utgörs av två identiska cirkelbågar med radien s, och för vilka medelpunktsvinkeln $=120^\circ = \frac{2\pi}{3}$	1
	Kurvans längd $= 2\cdot\frac{2\pi}{3}\cdot\frac{p}{3} = \frac{4\pi}{9}p$.	1
b)	Ritade kurvor	1+1
c)	Kurvan utgörs av tre cirkelbågar, av vilka den första och den tredje är lika långa. Den första cirkelbågens radie = kvadratens sida $\frac{p}{4}$ och den andras radie = kvadratens diagonal $\frac{p\sqrt{2}}{4}$. De medelpunktsvinklar som svarar mot bågarna är vardera $\frac{\pi}{2}$.	1
	Kurvans längd $= 2\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{p}{4} + \frac{1}{4}\cdot 2\pi\cdot\frac{p}{4}\cdot\sqrt{2} = \frac{(2+\sqrt{2})\pi}{8}p$.	1
d)	Kurvan utgörs av fem cirkelbågar av vilka den första och den femte respektive den andra och den fjärde är lika långa.	1
	Den första cirkelbågens radie = sexhörningens sida $=\frac{p}{6}$, den andra bågens radie = sexhörningens kortare diagonal $=\frac{p\sqrt{3}}{6}$ och den tredje bågens radie = sexhörningens längre diagonal $\frac{p}{3}$. Medelpunktsvinkeln som svarar mot vardera bågen = $\frac{\pi}{3}$.	1
	Kurvans längd $= 2\cdot\frac{\pi}{3}\cdot\frac{p}{6} + 2\cdot\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}p + \frac{\pi}{3}\cdot\frac{p}{3} = \frac{\pi}{9}p + \frac{\pi\sqrt{3}}{9}p + \frac{\pi}{9}p$ $= \frac{(1+\sqrt{3}+1)\pi}{9}p = \frac{\left(2+\sqrt{3}\right)\pi}{9}p$.	1

***15 a)**	Eftersom $g_0(x)=1$, $g_0 * f_1=\int_{-1}^{1} x\,dx=0$ och $g_0 * g_0=\int_{-1}^{1} 1dx=2$,	1
	är $g_1(x)=x-\frac{0}{2}\cdot 1=x$.	1
	Eftersom $g_0 * f_2=\int_{-1}^{1} x^2\,dx=\frac{2}{3}$, $g_1 * f_2=\int_{-1}^{1} xx^2\,dx=0$ och $g_1 * g_1=\int_{-1}^{1} x^2\,dx=\frac{2}{3}$,	1
	är $g_2(x)=x^2-\frac{\frac{2}{3}}{2}\cdot 1-\frac{0}{\frac{2}{3}}x=x^2-\frac{1}{3}$.	1
b)	Eftersom $g_0 * g_1=\int_{-1}^{1} x\,dx=0$, $g_0 * g_2=\int_{-1}^{1} (x^2-\frac{1}{3})\,dx=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}=0$	1
	och $g_1 * g_2=\int_{-1}^{1} x(x^2-\frac{1}{3})\,dx=\int_{-1}^{1}\left(x^3-\frac{1}{3}x\right)dx$ $=\Big/_{-1}^{1}\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{6}x^2\right)=\frac{1}{12}-\frac{1}{12}=0$, gäller ortogonalitet.	1
c)	Vi beräknar de skalära produkterna: $h * g_0=\int_{-1}^{1}\left(x^3+ax^2+bx+c\right)dx=\Big/_{-1}^{1}\left(\frac{1}{4}x^4+\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx\right)=\frac{2}{3}a+2c$, $h * g_1=\int_{-1}^{1}\left(x^3+ax^2+bx+c\right)xdx=\int_{-1}^{1}\left(x^4+ax^3+bx^2+cx\right)dx$ $=\Big/_{-1}^{1}\left(\frac{1}{5}x^5+\frac{a}{4}x^4+\frac{b}{3}x^3+\frac{c}{2}x^2\right)=\frac{2}{5}+\frac{2}{3}b$, $h * g_2=\int_{-1}^{1}\left(x^3+ax^2+bx+c\right)\left(x^2-\frac{1}{3}\right)dx$ $=\int_{-1}^{1}\left(x^5+ax^4+(b-\frac{1}{3})x^3+(c-\frac{a}{3})x^2-\frac{b}{3}x-\frac{c}{3}\right)dx$ $=\Big/_{-1}^{1}\left(\frac{1}{6}x^6+\frac{a}{5}x^5+\frac{3b-1}{12}x^4+\frac{3c-a}{9}x^3-\frac{b}{6}x^2-\frac{c}{3}x\right)=\frac{2a}{5}+\frac{6c-2a}{9}-\frac{2c}{3}=\frac{8}{45}a$.	1
	Funktionerna är ortogonala då $\frac{2}{3}a+2c=\frac{2}{5}+\frac{2}{3}b=\frac{8}{45}a=0$,	1
	vilket ger $a=c=0$ och $b=-\frac{3}{5}$.	1