MATEMATIKPROV, KORT LÄROKURS 24.9.2014
BESKRIVNING AV GODA SVAR

De beskrivningar av svarens innehåll och poängsättningar som ges här är inte bindande för studentexamensnämndens bedömning. Censorerna beslutar om de kriterier som används i den slutgiltiga bedömningen.

Av en god prestation framgår det hur examinanden har kommit fram till svaret. I lösningen måste det finnas nödvändiga uträkningar eller andra tillräckliga motiveringar och ett slutresultat. I bedömningen fästs uppmärksamhet vid helheten och vid de tre stegen start, mellansteg och slutresultat. Räknefel som inte väsentligt ändrar uppgiftens natur ger ingen betydande sänkning av antalet poäng. Räknefel och fel i den matematiska modellen som ändrar uppgiftens natur kan däremot sänka antalet poäng avsevärt.

I provet är räknaren ett hjälpmedel, och dess roll bedöms separat för varje uppgift. Om symbolräknare använts i en uppgift ska det framgå av prestationen. I lösningar av uppgifter som kräver analys räcker det inte enbart med ett svar som erhållits med hjälp av räknaren utan övriga motiveringar. Däremot räcker ett svar som examinanden fått med räknaren i allmänhet i rutinberäkningar. Detsamma gäller rutinmässiga delar av mera omfattande uppgifter. Exempel på sådana är omskrivning av uttryck, ekvationslösning och derivering och integrering av funktioner.

Preliminär poängbedömning

1. a)	Avlägsning av nämnarna: $\frac{x+2}{5}=\frac{x-3}{6} \Leftrightarrow 6x+12=5x-15$	1
	$\Leftrightarrow x=-27$	1
b)	Insättning ger $\frac{x+1}{y-1}+\frac{y-1}{x+1}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}$	1
	$=3+\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$	1
c)	I linjernas skärningspunkt uppfylls ekvationsparet $\begin{cases} x+5y=1 \\ x-5y=5 \end{cases}$ Genom att ledvis addera respektive subtrahera ekvationerna får vi $\begin{cases} 2x=6 \\ 10y=-4 \end{cases}$ [eller eliminera den ena variabeln och få en obekant]	1
	av vilket vi får skärningspunkten $\begin{cases} x=3 \\ y=-\frac{2}{5} \end{cases}$	1

2. a)	$2^x=2=2^1 \Leftrightarrow x=1$	1
b)	$2^x=\frac{1}{2}=2^{-1} \Leftrightarrow x=-1$	1
c)	$2^x=8^2=\left(2^3\right)^2=2^6 \Leftrightarrow x=6$	1
d)	$3^x=\frac{1}{3^5}=3^{-5} \Leftrightarrow x=-5$	1
e)	$10^x=1000=10^3 \Leftrightarrow x=3$	1
f)	$10^x=0{,}01=10^{-2} \Leftrightarrow x=-2$	1

3. a)	Avlägsning av parenteser: $(x+1)(2-x)-2=-x^2+x$	1
	$=x(-x+1)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee -x+1=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=1$ [eller med rotformeln]	1
b)	Genom att pröva får vi heltalen $n=-1,0,2,3,4$.	2
	Ett värde för *n* saknas	–1
c)	Cirkelns radie är *r*. Arean $A=\pi r^2=520 \Rightarrow r=\sqrt{\frac{520}{\pi}}$	1
	Diametern $2r=2\sqrt{\frac{520}{\pi}}=25,7310... \approx 25,7$ centimeter.	1
	Fel noggrannhet i svaret	–1

4.	I början: volymen = 100 ml, enhetspriset = 1,50 € och pris/volym $=\frac{1,50}{100}$ €/ml = 0,015 €/ml.	1
	Förändrade värden: volymen = $1,25\cdot 100$ ml = 125 ml, enhetspriset $=1,40\cdot 1,50$ € = 2,10 € och pris/volym $\frac{2,10}{125}$ €/ml = 0,0168 €/ml.	2
	Jämförelse: $\frac{0,0168}{0,015}=1,12$,	2
	vilket betyder att tandkrämen blivit 12 % dyrare.	1
	ELLER:	
	I början är volymen *V*, tubens pris *p* och priset/volym $\frac{p}{V}$.	1
	Förändrade värden: volymen $1,25V$, tubens pris 1,4*p* och pris/volym $\frac{1,4p}{1,25V}$.	2
	Prisjämförelse $\frac{1,4p}{1,25V}:\frac{p}{V}=1,12$,	2
	vilket betyder att tandkrämen blivit 12 % dyrare.	1

5.	Kurvan $y=(x-3)^2+(x-9)^2=2x^2-24x+90$ är en uppåtvänd parabel,	1
	dvs. minsta värdet = toppens *y*-koordinat.	1
	Det efterfrågade variabelvärdet = toppens *x*-koordinat.	1
	$y'(x)=4x-24$.	1
	$y'(x)=0 \Leftrightarrow 4x-24=0$	1
	$\Leftrightarrow x=6$. [= medelvärdet av konstanterna 3 och 9]	1

6. a)	När flygekorren faller höjden h gäller $60 = 3{,}3h$,	1
	vilket ger $h = \frac{60}{3{,}3} = 18{,}1818...$	1
	Flygekorren ska alltså ta sats från höjden $h + 1 = 19{,}1818... \approx 19$ meter	1
b)	Om flygvinkeln i förhållande till horisontalplanet $= \alpha$, så gäller $\tan\alpha = \frac{1}{3{,}3}$	1
	$= 0{,}3030...$,	1
	varvid $\alpha = 16{,}8583...^\circ \approx 17^\circ$ snett nedåt.	1

7.	Om kubens kant = s, så är dess volym $V_k = s^3$.	1
	Arean av pyramidens botten $A = s^2$.	1
	Pyramidens höjd $h = \frac{1}{2}s$.	1
	Pyramidens volym $V_p = \frac{1}{3}Ah = \frac{1}{3} \cdot s^2 \cdot \frac{1}{2}s$	1
	$= \frac{1}{6}s^3 = \frac{1}{6}V_k$	1
	Det efterfrågade förhållandet är därmed 1:6.	1
	ELLER:	
	Kuben består av sex identiska pyramider, dvs. förhållandet är 1:6.	6

8. a)

Lag	Åskådarantal x	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$
Jokerit	9173	2618	6853924
HIFK	8266	1711	2927521
Kärpät	5821	-734	538756
TPS	5534	-1021	1042441
Tappara	5359	-1196	1430416
Ilves	5177	-1378	1898884
totalt	39330		14691942

Beräknat medelvärde $\bar{x} = \frac{39330}{6} = 6555$ och den ovan givna tabellen ifylld. — 2

Standardavvikelsen $\sigma = \sqrt{\frac{14691942}{6}} = 1564{,}8185... \approx 1565$. — 1

b)	Åskådarantalet för varje lag är över 4990 = 6555 – 1565.	1
	Endast Jokerits och HIFK:s åskådarantal är över 8120 = 6555+1565.	1
	De efterfrågade lagen är därmed Jokerit och HIFK.	1

9. a)	Bengts $I=\frac{102}{1{,}93^2}=27{,}3832...\approx 27{,}4$.	1
	Bengts $J=\frac{1{,}3\cdot 102}{1{,}93^{2{,}5}}=25{,}6241...\approx 25{,}6$.	1
b)	Hannas massa $m=I\,h^2=25\cdot 1{,}60^2=64$ kilogram	1
	Hennes *J*-index är alltså $J=\frac{1{,}3\cdot 64}{1{,}60^{2{,}5}}=25{,}6935...\approx 25{,}7$.	1
c)	Indexen är lika stora när $\frac{m}{h^2}=\frac{1{,}3m}{h^{2{,}5}}$. Då är $\frac{1{,}3}{\sqrt{h}}=1$, vilket ger	1
	$h=1{,}3^2=1{,}69$ meter.	1

10.	Den vänstra kvadratens sida har längden $s_v=\frac{5}{2}=2{,}5$.	1
	Om den högra kvadratens sida är $s_h=x$, så är hypotenusan = 3*x*. (minnestrianglar).	1
	Vi får villkoret $5\sqrt{2}=3x$	1
	$\Leftrightarrow x=\frac{5\sqrt{2}}{3}$	1
	$=2{,}3570...<2{,}5$, vilket betyder att $s_v>s_h$.	1
	Härmed är också den vänstra kvadratens area större.	1

11.	Den stora munkens radie är *R*, varvid dess volym är $V_s=\frac{4}{3}\pi R^3$ och area $A_s=4\pi R^2$.	1
	Den lilla munkens radie är *r*, varvid $V_l=\frac{4}{3}\pi r^3$ och $A_l=4\pi r^2$.	1
	Vi får volymvillkoret $3V_s=24V_l \Leftrightarrow V_s=8V_l$,	1
	dvs. $\frac{4}{3}\pi R^3=8\cdot\frac{4}{3}\pi r^3$	1
	$\Leftrightarrow R^3=8r^3\Leftrightarrow R=2r$.	1
	Förhållandet mellan de totala areorna, dvs. förhållandet mellan mängden socker är ”små : stora” = $\frac{24A_l}{3A_s}=\frac{8\cdot 4\pi r^2}{4\pi(2r)^2}=2$.	1

12.	Modell: Mängden utsläpp $P(t) = a \cdot b^t$. Vi undersöker situationen från år 1990, varvid modellens t är antalet år efter 1990. Utsläppen år 1990 är $P(0) = a$.	1
	Den årliga tillväxtfaktorn är $b = 1 + \frac{p}{100}$, där p = årlig tillväxtprocent. Utsläppens ökning 1990 – 2008 var 39 %. Vi får ekvationen: $P(18) = 1{,}39P(0)$,	1
	dvs. $a \cdot b^{18} = 1{,}39a$,	1
	vilket ger tillväxtfaktorn $b = \sqrt[18]{1{,}39} = 1{,}0184...$	1
	År 2015 är $t = 25$, dvs. $P(25) = a \cdot b^{25} = a \cdot 1{,}5799... \approx 1{,}58a$.	1
	Utsläppen har därmed totalt vuxit med ca 58 %.	1

13. **a)**	Ett hörn är i origo. De övriga hörnen får vi med ekvationsparen: $\begin{cases} x = 0 \\ x + 3y = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 6 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 0 \\ 3x + 2y = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{19}{3} \\ y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x + 3y = 18 \\ 3x + 2y = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x - 9y = -54 \\ 3x + 2y = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$	2
	Figur	1
	Ett hörn fel	–1
b)	Vi får extremvärdena till funktionen $f(x, y) = 2x + y$ i fyrhörningens hörnpunkter.	1
	Kandidater: $f(0,0) = 0$, $f(0,6) = 6$, $f(3,5) = 11$, $f\left(\frac{19}{3}, 0\right) = \frac{38}{3}$,	1
	av vilka $\frac{38}{3}$ är störst och 0 minst.	1

14. a)	Vi tillämpar annuitetsformeln $A = Kq^n \frac{1-q}{1-q^n}$, i vilken $K = 8000$ €, $p = \frac{6,6}{12} = 0,55$, $q = 1 + \frac{p}{100} = 1,0055$ och $n = 24$.	1
	Insättningar: $A = 8000 \cdot q^{24} \cdot \frac{1-q}{1-q^{24}} = 356,7316...$, dvs. annuiteten, eller månadsraten, är 356,73 €.	1
b)	Vi sätter in de beräknade värdena för q och A samt $k = 12$ i formeln för det återstående lånebeloppet $V_k = Kq^k - A\frac{1-q^k}{1-q}$.	1
	Vi får $V_{12} = 8000q^{12} - A\frac{1-q^{12}}{1-q} = 4131,5908...$, vilket betyder att 4131,59 € återstår av lånet.	1
c)	Den ränta som Kristian totalt betalar = $24A - 8000$	1
	$= 24 \cdot 356,73 - 8000 = 561,52$ euro.	1

15. a)	Anta att $A = (20,10,5)$. $\left\|\bar{v}\right\| = \sqrt{4+9+36} = \sqrt{49} = 7$	1
	Villkoret för avståndet är $t\left\|\bar{v}\right\| = 7t = 105$, vilket ger $t = 15$.	1
	Explosionspunkten är P. Vi får ekvationen $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + 15\bar{v} = 20\bar{i} + 10\bar{j} + 5\bar{k} + 30\bar{i} - 45\bar{j} + 90\bar{k} = 50\bar{i} - 35\bar{j} + 95\bar{k}$, vilket ger explosionspunkten $(50, -35, 95)$.	1
b)	Avståndet till åskådarna är $\sqrt{50^2 + (-35)^2 + 95^2}$	1
	$= \sqrt{12750}$	1
	$= 112,9158... \approx 113$ meter.	1