MATEMATIKPROV, LÅNG LÄROKURS 24.9.2014
BESKRIVNING AV GODA SVAR

De beskrivningar av svarens innehåll och poängsättningar som ges här är inte bindande för studentexamensnämndens bedömning. Censorerna beslutar om de kriterier som används i den slutgiltiga bedömningen.

Av en god prestation framgår det hur examinanden har kommit fram till svaret. I lösningen måste det finnas nödvändiga uträkningar eller andra tillräckliga motiveringar och ett slutresultat. I bedömningen fästs uppmärksamhet vid helheten och vid de tre stegen start, mellansteg och slutresultat. Räknefel som inte väsentligt ändrar uppgiftens natur ger ingen betydande sänkning av antalet poäng. Räknefel och fel i den matematiska modellen som ändrar uppgiftens natur kan däremot sänka antalet poäng avsevärt.

I provet är räknaren ett hjälpmedel, och dess roll bedöms separat för varje uppgift. Om symbolräknare använts i en uppgift ska det framgå av prestationen. I lösningar av uppgifter som kräver analys räcker det inte enbart med ett svar som erhållits med hjälp av räknaren utan övriga motiveringar. Däremot räcker ett svar som examinanden fått med räknaren i allmänhet i rutinberäkningar. Detsamma gäller rutinmässiga delar av mera omfattande uppgifter. Exempel på sådana är omskrivning av uttryck, ekvationslösning och derivering och integrering av funktioner.

Preliminär poängbedömning

1. a)	$(x-2)(x-3)=6 \Leftrightarrow x(x-5)=0$	1
	$\Leftrightarrow x=0 \vee x=5$	1
	ELLER med rotformeln**:**	
	$x^2-5x=0$,	1
	vilket ger $x=\frac{5\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{5\pm5}{2}=\begin{cases}0\\5\end{cases}$	1
b)	Vi får skärningspunkterna med ekvationsparet $\begin{cases}y=x^2+x+1\\y=x^2+2x+3\end{cases}$ Ledvis subtraktion av ekvationerna ger $-x-2=0$, vilket ger $x=-2$.	1
	Då vi sätter in detta värde i endera ekvationen får vi $y=3$ och skärningspunkten är därmed $(-2,3)$.	1
c)	Det efterfrågade talet $=x$. Villkoret är $\frac{x+\frac{1}{x}}{2}=4$.	1
	Vi får ekvationen $x^2-8x+1=0$, av vilket vi med rotformeln får lösningen $x=4\pm\sqrt{15}$.	1

2. a)	$\begin{cases}2x+3y=7 \mid \cdot 2\\3x-2y=4 \mid \cdot 3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x+6y=14\\9x-6y=12\end{cases}$ Med ledvis addition får vi $13x=26 \Leftrightarrow x=2$.	1
	Genom att sätta in värdet i den övre ekvationen får vi $4+3y=7 \Leftrightarrow y=1$. Skärningspunkten är därmed (2,1).	1
b)	Det efterfrågade talet är x. Villkoret är $x=\frac{1}{2}\sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x}=2x$.	1
	Genom ledvis kvadrering får vi $x=4x^2 \Leftrightarrow x(4x-1)=0$ $\Leftrightarrow x=0 \vee 4x-1=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=\frac{1}{4}$.	1
c)	Logaritmregler ger $\ln\left(\frac{1}{3x^2}\right)+\ln 3+2\ln x=\ln 1-(\ln 3+2\ln x)+\ln 3+2\ln x$,	1
	av vilket man genom hyfsning får svaret 0.	1

3. a)	Villkoret är $f(t) = 38 - 2e^{-0,6t} \geq 37,9$	1
	$\Leftrightarrow 2e^{-0,6t} \leq 0,1 \Leftrightarrow e^{0,6t} \geq 20$.	1
	Genom att ledvis logaritmera får vi $0,6t \geq \ln 20 \Leftrightarrow t \geq \frac{\ln 20}{0,6} \approx 4,9928... \approx 5$ minuter.	1
b)	Förändringshastigheten $f'(t) = -2e^{-0,6t} \cdot (-0,6) = 1,2e^{-0,6t}$,	2
	vilket ger $f'(3) = 1,2e^{-1,8} = 0,1983... \approx 0,2$ grader per minut.	1

4. a)	Korrekt idé.	1
	Ekvationen är $y = x^2 + 2$.	1
b)	Korrekt idé.	1
	Ekvationen är $y = (x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$.	1
c)	Vi kombinerar uppslagen i a- och b-fallen	1
	Ekvationen är $y = (x-3)^2 + 2 \Leftrightarrow y = x^2 - 6x + 11$.	1

5.	Med stöd av symmetri och formeln för volymen av en rotationskropp är volymen $2\pi \int_0^\pi \sin^2 x\, dx$	1
	$= \pi \int_0^\pi \left(1 - \cos(2x)\right) dx$	2
	$= \pi \Big/_0^\pi \left(x - \frac{1}{2}\sin(2x)\right)$	2
	$= \pi^2 \; [= 9,8696...]$	1

6.	Avståndet från bågens punkt $\left(x, 3x-5x^2\right)$ till origo är d. Då är $d^2 = f(x) = x^2 + \left(3x-5x^2\right)^2 = 25x^4 - 30x^3 + 10x^2$, $0 \le x \le \frac{1}{2}$.	1
	$f'(x) = 100x^3 - 90x^2 + 20x = 10x(10x^2 - 9x + 2)$.	1
	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 10x^2 - 9x + 2 = 0$,	1
	av vilket $x = 0 \vee x = \frac{2}{5} \vee x = \frac{1}{2}$.	1
	Vi får det största värdet i en intervalländpunkt eller i derivatans nollställe. Extremvärdeskandidaterna är därmed $f(0) = 0$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}3125$ och $f\left(\frac{2}{5}\right) = 0{,}32$, av vilka det sista värdet är störst.	1
	Punkten $y = y\left(\frac{2}{5}\right) = 3 \cdot \frac{2}{5} - 5 \cdot \frac{4}{25} = \frac{2}{5}$. Den efterfrågade punkten är därmed $\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right)$.	1

7.	Normering: Mängden kaffe $X \sim N(\mu, 10) \Rightarrow Z = \dfrac{X-\mu}{10} \sim N(0,1)$.	1
	Sannolikheten för ett underviktigt paket är $P(X < 500) = P\left(Z < \frac{500-\mu}{10}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\mu-500}{10}\right)$.	1
	Eftersom denna sannolikhet måste vara $\le 0{,}02$, så måste det gälla att $\Phi\left(\frac{\mu-500}{10}\right) \ge 0{,}98$.	1
	Enligt tabellen för fördelningsfunktionen gäller approximativt $\dfrac{\mu-500}{10} \ge 2{,}05$,	1
	av vilket följer $\mu \ge 20{,}5 + 500 = 520{,}5$.	1
	Väntevärdet för mängden kaffe bör alltså regleras till 521 gram.	1

8. a)	Om talföljden $\left(a_n\right)$ är geometrisk, så gäller $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{a_n}{a_{n-1}}$	1
	$\Rightarrow a_n{}^2 = a_{n-1} \cdot a_n$,	1
	av vilket $a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}$.	1
b)	Om $b_n = \sqrt{b_{n-1}b_{n+1}}$, så är $b_n{}^2 = b_{n-1}b_{n+1}$.	1
	Genom att ledvis dividera med uttrycket $b_n b_{n-1}$ får vi $\dfrac{b_n}{b_{n-1}} = \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$,	1
	dvs. talföljden är geometrisk.	1

9. a)	Eftersom $f(t)$ är en jämn funktion är den båge som ska undersökas symmetrisk med avseende på den lodräta axel som går genom toppen. Vi får bågens höjd med värdet $x=0$.	1
	Höjden $=-39f(0)+231=-39\cdot 1+231=192$ meter.	1
b)	Hälften av bågens bredd är den positiva x-koordinaten för bågens tjockända. I bågens tjockända är $y=0$, dvs. $-39f\left(\frac{x}{39}\right)+231=0$ $\Leftrightarrow f\left(\frac{x}{39}\right)=\frac{231}{39}=\frac{77}{13}$. Stödberäkning: $f(t)=a \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(e^t+\frac{1}{e^t}\right)=a$. Vi multiplicerar ledvis med uttrycket $2e^t$, varvid vi får ekvationen $\left(e^t\right)^2-2ae^t+1=0$. Vi får $e^t=\dfrac{2a\pm\sqrt{4a^2-4}}{2}=a\pm\sqrt{a^2-1}$, vilket ger $t=\ln\left(a\pm\sqrt{a^2-1}\right)$.	1
	Vi sätter in värden: $\frac{x}{39}=\ln\left(\frac{77}{13}\pm\sqrt{\left(\frac{77}{13}\right)^2-1}\right)$, av vilket $x\approx 39\ln\left(5{,}92\pm\sqrt{5{,}92^2-1}\right)=\begin{cases}96{,}1271...\\-96{,}1271...\end{cases}$ Eftersom det negativa värdet inte duger är bågens bredd $2x=192{,}2543...\approx 192$ meter.	1
c)	$f'(t)=\frac{1}{2}(e^t-e^{-t})$, dvs. $y'(x)=-39\cdot f'\left(\frac{x}{39}\right)\cdot\frac{1}{39}=-f'\left(\frac{x}{39}\right)$ $=-\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{39}}-e^{-\frac{x}{39}}\right)$.	1
	För den efterfrågade vinkeln α gäller ekvationen $\tan\alpha=y'(-x)=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{39}}-e^{-\frac{x}{39}}\right)$, av vilket vi för värdet $x=96{,}1271...$ får $\tan\alpha=5{,}8380...$, och vidare $\alpha=80{,}2801...^\circ\approx 80^\circ$.	1

10. a)	Anta att punkten $C=(x,y)$ och $E=(x,0)$. Då är $\Delta TOC \sim \Delta COE$, vilket ger $\frac{t}{1}=\frac{1}{x}$, av vilket följer $x=\frac{1}{t}$.	1
	Eftersom $x^2+y^2=1$ så är $y=\sqrt{1-x^2}$.	1
	Koordinaterna för punkten *C* är därmed $\left(\frac{1}{t},\sqrt{1-\left(\frac{1}{t}\right)^2}\right)=\left(\frac{1}{t},\frac{\sqrt{t^2-1}}{t}\right)$.	1
b)	Radien för den mindre cirkeln $CT=\sqrt{t^2-1}$. Vi betecknar $DE=a$. Sträckan $TA=t-1$ och $AE=1-\frac{1}{t}$. Vi får ekvationen $TA+AE+ED=TD$, dvs. $t-1+1-\frac{1}{t}+a=\sqrt{t^2-1}$, av vilket $a=\sqrt{t^2-1}-t+\frac{1}{t}=\frac{1-t^2+t\sqrt{t^2-1}}{t}$.	1
	Riktningskoefficienten för sträckan *CD* är $k_{CD}=\frac{y}{a}=\frac{\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}}{\frac{1-t^2+t\sqrt{t^2-1}}{t}}=\frac{\sqrt{t^2-1}}{t\sqrt{t^2-1}-\left(t^2-1\right)}$ $=\frac{\sqrt{t^2-1}}{t\sqrt{t^2-1}-\left(\sqrt{t^2-1}\right)^2}=\frac{1}{t-\sqrt{t^2-1}}$.	1
	Eftersom sträckan $OD=\frac{1}{t}-a=\frac{1}{t}-\sqrt{t^2-1}+t-\frac{1}{t}=t-\sqrt{t^2-1}$, är $k_{BD}=\frac{1}{OD}=\frac{1}{t-\sqrt{t^2-1}}=k_{CD}$. Därmed ligger punkterna *B*, *D* och *C* på samma linje.	1

11. a)	$f'(x)=\dfrac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}$,	1
	som är positiv för varje $x \Rightarrow$ påstående.	1
	ELLER:	
	$f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}=\dfrac{1+e^x-1}{1+e^x}=1-\dfrac{1}{1+e^x}$.	1
	Då x växer så avtar $\dfrac{1}{1+e^x}$, varvid differensen växer. Alltså växer $f(x)$ strängt.	1
b)	$f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}\overset{(e^x}{=}\dfrac{1}{\frac{1}{e^x}+1}$	1
	$\to\dfrac{1}{0+1}=1$, då $x\to\infty$.	1
c)	Eftersom $f(10)=0{,}99995...>0{,}999$	1
	och $f(x)$ är strängt växande, så gäller olikheten.	1

12. a)	Sant,	1
	eftersom till exempel talen $x=y$ duger.	1
b)	Falskt,	1
	eftersom det inte existerar ett största reellt tal y.	1
c)	Sant,	1
	därför att om $x=0$, så gäller det för alla naturliga tal y att: $0\le y$.	1

13. a)	En lösning till ekvationen $x^5 - x = 1$ är densamma som nollstället till funktionen $f(x) = x^5 - x - 1$. Eftersom $f'(x) = 5x^4 - 1 > 0$, då $1 \le x \le 2$, är $f(x)$ strängt växande i detta intervall.	1
	Då det dessutom gäller att $f(1) = -1 < 0$ och $f(2) = 29 > 0$,	1
	har den kontinuerliga funktionen $f(x)$ exakt ett nollställe och därmed har ekvationen exakt en lösning.	1
b)	Newtons iterationsformel är $x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^5 - x_n - 1}{5x_n^4 - 1} \left[= \dfrac{4x_n^5 + 1}{5x_n^4 - 1} \right]$.	2
	Iterering: $x_0 = 1$ $x_1 = 1{,}25$ $x_2 = 1{,}1784...$ $x_3 = 1{,}1675...$ $x_4 = 1{,}1673... \approx 1{,}167$	1

***14. a)**	Vi ritar sträckorna *AD* och *BC*. Då är $\angle CBA = \angle CDA$ bågvinklar till samma båge *AC*. Dessutom har trianglarna en gemensam vinkel $\angle APC$.	2
	Därmed är trianglarna likformiga (vv).	
b)	Med stöd av likformigheten gäller $\dfrac{PA}{PD} = \dfrac{PC}{PB}$,	1
	av vilket vi genom att multiplicera korsvis får $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.	1
c)	Anta att *K* är cirkelns medelpunkt. Vi ritar sträckorna *AC* och *AD* och betecknar $\angle CDA = \alpha$. Då är $\angle CKA = 2\alpha$, eftersom den är motsvarande medelpunktsvinkel till samma cirkelbåge *AC*. För vinklarna i den likbenta triangeln *CKA* gäller: $\angle ACK = \angle KAC = 90^\circ - \alpha$. Eftersom $\angle KAP = 90^\circ$, är $\angle CAP = 90^\circ - \left(90^\circ - \alpha\right) = \alpha$.	1
	Trianglarna *PCA* och *DAP* har två lika stora vinklar. De är då likformiga, av vilket följer att $(PA)^2 = PC \cdot PD$.	1
d)	Vi betecknar triangelns hörnpunkter *K*, *A*, *P*. Hypotenusan skär cirkeln i punkten *E*. Vi förlänger hypotenusan *c* med $EK = a$, varvid förlängningen träffar cirkeln i punkten *D*.	1
	med stöd av deluppgift **b** gäller $PA^2 = PE \cdot PD$.	1
	Vi betecknar $PA = b$ och $PK = c$, varvid $b^2 = (c-a)(c+a) = c^2 - a^2$, av vilket följer Pythagoras sats $a^2 + b^2 = c^2$.	1

***15. a)**	Eftersom kvadraten på ett binom $(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$,	1
	så är $xy \leq \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$ för varje $x, y \in \mathbf{R}$.	1
b)	Med stöd av föregående är $x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$ $\leq \frac{1}{2}\left[\left(x_1{}^2 + y_1{}^2\right) + \left(x_2{}^2 + y_2{}^2\right) + \ldots + \left(x_n{}^2 + y_n{}^2\right)\right]$	1
	$= \frac{1}{2}\left[\left(x_1{}^2 + x_2{}^2 + \ldots + x_n{}^2\right) + \left(y_1{}^2 + y_2{}^2 + \ldots + y_n{}^2\right)\right]$	1
	Genom att i föregående uttryck substituera $x_k = \frac{a_k}{A}$ och $y_k = \frac{b_k}{B}$ får uttrycket formen $\frac{1}{2}\left[\frac{a_1{}^2 + a_2{}^2 + \ldots + a_n{}^2}{A^2} + \frac{b_1{}^2 + b_2{}^2 + \ldots + b_n{}^2}{B^2}\right] = \frac{1}{2}(1+1) = 1.$	2
c)	Med stöd av föregående deluppgift är $a_1b_1 + \ldots + a_nb_n = x_1A \cdot y_1B + \ldots + x_nA \cdot y_nB = AB(x_1y_1 + \ldots + x_ny_n)$	1
	$\leq AB \cdot 1 =$	1
	$\sqrt{a_1{}^2 + \ldots + a_n{}^2}\sqrt{b_1{}^2 + \ldots + b_n{}^2}$.	1