Ylioppilastutkintolautakunta
Studentexamensnämnden

MATEMATIKPROV, KORT LÄROKURS 20.3.2013 BESKRIVNING AV GODA SVAR

> De beskrivningar av svarens innehåll som ges här är inte bindande för studentexamensnämndens bedömning. Censorerna beslutar om de kriterier som används i den slutgiltiga bedömningen.

Av en god prestation framgår det hur examinanden har kommit fram till svaret. I lösningen måste det finnas behövliga uträkningar eller andra tillräckliga motiveringar och ett slutresultat. I bedömningen fästs uppmärksamhet vid helheten och vid de tre stegen: starten, mellanstegen och slutresultatet. Räknefel som inte väsentligt ändrar uppgiftens natur ger ingen betydande sänkning av antalet poäng. Räknefel och fel i den matematiska modellen som ändrar uppgiftens natur kan däremot sänka antalet poäng betydligt.

I provet är räknaren ett hjälpmedel, och dess roll bedöms separat för varje uppgift. Om symbolräknare använts i en uppgift ska det framgå av prestationen. I lösningar av uppgifter som kräver analys räcker det inte enbart med ett svar som erhållits med hjälp av räknaren utan övriga motiveringar. Däremot räcker ett svar som examinanden fått med räknaren i allmänhet i rutinberäkningar. Detsamma gäller rutinmässiga delar av mera omfattande uppgifter. Exempel på sådana är omskrivning av uttryck, ekvationslösning och derivering och integrering av funktioner.

1. **a)** $2(x+4)-3(x-3)=0 \Leftrightarrow 2x+8-3x+9=0 \Leftrightarrow -x=-17 \Leftrightarrow x=17.$

b) Medelvärdet är $\dfrac{\frac{4}{3}+\frac{5}{6}}{2}=\frac{13}{12}.$

c) $\dfrac{3a-6a^2}{3a}=\dfrac{3a(1-2a)}{3a}=1-2a.$

2. **a)** $4x+17>2-x \Leftrightarrow 5x>-15 \Leftrightarrow x>-3.$

b) $x^2+14x=-49 \Leftrightarrow x^2+14x+49=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-14\pm\sqrt{14^2-4\cdot 49}}{2}=\dfrac{-14}{2}=-7.$

c) Linjens riktningskoefficient är $k=\frac{3}{2}$ och ekvation $y=\frac{3}{2}x.$ Punkten $(48,75)$ uppfyller inte linjens ekvation, eftersom $\frac{3}{2}\cdot 48=72\neq 75.$ Linjen går inte genom denna punkt.

3. **a)** $f(x)=x(x+2)-5=x^2+2x-5,$ vilket ger $f'(x)=2x+2$ och $f'(1)=4.$

b) $5^{3x-1}=25^{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow 5^{3x-1}=\left(5^2\right)^{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow 5^{3x-1}=5^x \Leftrightarrow 3x-1=x \Leftrightarrow 2x=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}.$

4. Priset för första sträckan är $21{,}90$ €, mellersta sträckans pris är $28{,}20\ € - 21{,}90\ € = 6{,}30$ € och sista sträckans pris är $33{,}50\ € - 28{,}20\ € = 5{,}30$ €.

Alf betalar $\frac{1}{3}\cdot 21{,}90\ € = 7{,}30$ €, Sanna betalar $7{,}30\ € + \frac{1}{2}\cdot 6{,}30\ € = 10{,}45$ €

och Paul betalar $10{,}45\ € + 5{,}30\ € = 15{,}75$ €.

5. Vi betecknar det efterfrågade avståndet $x.$ Med stöd av likformighet får vi

$$\frac{39}{x}=\frac{26}{50-x} \Leftrightarrow 1950-39x=26x \Leftrightarrow 65x=1950 \Leftrightarrow x=30.$$

Det efterfrågade avståndet är 30 m.

6. Bollarnas radie är $r=\frac{6{,}68}{2}=3{,}34$ cm. Då är bollarnas totala volym

$$V_p=4\cdot\tfrac{4}{3}\pi\cdot 3{,}34^3\approx 624{,}2923 \text{ cm}^3.$$

Förpackningens volym är

$$V_l=\pi r^2 h=\pi\cdot 3{,}34^2\cdot 4\cdot 6{,}68\approx 936{,}4385 \text{ cm}^3,$$

vilket innebär att volymernas förhållande är

$$\frac{V_p}{V_l}\approx\frac{624{,}2923}{936{,}4385}\approx 0{,}67.$$

Bollarna fyller 67 % av förpackningens volym.

7. Derivatan är $f'(x)=6x^2+4x-10.$ Då är

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 6x^2+4x-10=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ eller } x=-\tfrac{5}{3},$$

av vilka det senare nollstället inte tillhör intervallet [0,2]. Vi beräknar värdena $f(0)=5$, $f(1)=-1$ och $f(2)=9.$ Funktionens minsta värde är -1 och största värde 9, vilket betyder att funktionen får alla värden i intervallet $[-1,9]$.

8. a) Antalet ökade med $1460500-422500=1038000$. Ökningen i procent är

$$\frac{1038000}{422500}\cdot 100\ \% \approx 246\ \%.$$

b) Ekvationen $1460500\cdot q^4=422500$ ger $q^4=\frac{422500}{1460500}\approx 0{,}2892$, dvs.

$q\approx\sqrt[4]{0{,}2892}\approx 0{,}7333$. Den efterfrågade procenten för den årliga minskningen är 26,7.

9. a) Om kvadratens sida är a, är dess omkrets $4a$ och area $A_1=a^2$. Om cirkelns radie är r, är dess omkrets $2\pi r$ och area $A_2=\pi r^2$. Alltså är $4a=2\pi r$, vilket ger $a=\frac{\pi r}{2}$.

Förhållandet mellan areorna är

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{a^2}{\pi r^2}=\frac{\left(\frac{\pi r}{2}\right)^2}{\pi r^2}=\frac{\pi}{4}\approx 0{,}7854,$$

vilket betyder att kvadraten har en 21,5 % mindre area.

b) Förhållandet mellan areorna är $\frac{A_2}{A_1}=\frac{4}{\pi}\approx 1{,}2732$, dvs. cirkelns area är 27,3 % större.

10. Av utfallen bildas ett 6 x 6-rutsystem.

a) Utgående från rutsystemet är de gynnsamma utfallen

(2,6), (3,5), (3,6), (4,4), (4,5), (4,6), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6),
(6,2), (6,3), (6,4), (6,5) och (6,6).

Den efterfrågade sannolikheten är $\frac{15}{36}=\frac{5}{12}\approx 0{,}42$.

b) Utgående från rutsystemet är de gynnsamma utfallen

(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (3,1), (4,1), (5,1) och (6,1).

Den efterfrågade sannolikheten är $\frac{11}{36}\approx 0{,}31$.

11. a) Differensen mellan två på varandra efterföljande termer är $d=\frac{12}{5}-2=\frac{2}{5}$, vilket ger

$$a_{100}=a_1+99d=2+99\cdot\tfrac{2}{5}=\tfrac{208}{5}.$$

Summan är

$$100\cdot\frac{2+\frac{208}{5}}{2}=2180.$$

b) Kvoten är $q=\frac{\frac{12}{5}}{2}=\frac{6}{5}=1,2,$ vilket ger summan

$$\frac{2\left(1-1,2^{100}\right)}{1-1,2}\approx 828179735\approx 828\cdot 10^{6}.$$

12. Om X är normalfördelad $\mathrm{N}(52;\,1{,}25)$, är den normerade stokastiska variabeln

$Z=\dfrac{X-52}{1,25}$ normalfördelad $\mathrm{N}(0,1)$. Då är

$$P(X<50)=P\left(Z<\frac{50-52}{1,25}\right)=\Phi(-1,6)\ =1-\Phi(1,6)\approx 1-0,9452$$
$$=0,0548\approx 5,5\ \%.$$

13. a) Ekvationen $2300\cdot e^{40a}=2,6\cdot 10^{9}$ ger $e^{40a}=\dfrac{2,6\cdot 10^{9}}{2300}\approx 1,1304\cdot 10^{6}$ och

vidare $a\approx\dfrac{\ln(1,1304\cdot 10^{6})}{40}\approx 0,35.$

b) Antalet fördubblas på tiden *t*, om $e^{at}=2.$ Av detta får vi

$$t=\frac{\ln 2}{a}\approx 2,0,$$

vilket betyder att Moores lag gäller.

14. a) Om det tillverkade antalet fodral är x, är de totala kostnaderna $12,30x+98000$ €.

b) Intäkten är $0,75x\cdot 17,99+0,25x\cdot 14,00\ =16,9925x$, och vinsten är

$16,9925x-(12,30x+98000)=4,6925x-98000.$

c) Kostnaderna täcks då

$$4,6925x-98000\geq 0\ \Leftrightarrow x\geq\frac{98000}{4,6925}\approx 20884,4.$$

Man måste tillverka minst 20 885 stycken fodral.

15. a) Utgående från grafen är det största värdet för funktionen $A\sin(bx)$ ungefär 3.

Eftersom det största värdet för funktionen $\sin(bx)$ är 1, är $A\approx 3.$

b) Enligt grafen är $x\approx 180^{\circ}$ det första positiva maximistället för funktionen $A\sin(bx).$

Därför är $b\cdot 180^{\circ}\approx 90^{\circ}\Leftrightarrow b\approx 0,5.$

c) Utgående från grafen är $L\approx 720^{\circ}.$