MATEMATIKPROV, LÅNG LÄROKURS 20.3.2013 BESKRIVNING AV GODA SVAR

De beskrivningar av svarens innehåll som ges här är inte bindande för studentexamensnämndens bedömning. Censorerna beslutar om de kriterier som används i den slutgiltiga bedömningen.

Av en god prestation framgår det hur examinanden har kommit fram till svaret. I lösningen måste det finnas behövliga uträkningar eller andra tillräckliga motiveringar och ett slutresultat. I bedömningen fästs uppmärksamhet vid helheten och vid de tre stegen: starten, mellanstegen och slutresultatet. Räknefel som inte väsentligt ändrar uppgiftens natur ger ingen betydande sänkning av antalet poäng. Räknefel och fel i den matematiska modellen som ändrar uppgiftens natur kan däremot sänka antalet poäng betydligt.

I provet är räknaren ett hjälpmedel, och dess roll bedöms separat för varje uppgift. Om symbolräknare använts i en uppgift ska det framgå av prestationen. I lösningar av uppgifter som kräver analys räcker det inte enbart med ett svar som erhållits med hjälp av räknaren utan övriga motiveringar. Däremot räcker ett svar som examinanden fått med räknaren i allmänhet i rutinberäkningar. Detsamma gäller rutinmässiga delar av mera omfattande uppgifter. Exempel på sådana är omskrivning av uttryck, ekvationslösning och derivering och integrering av funktioner.

1. **a)** $(x-4)^2 = (x-4)(x+4) \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 = x^2 - 16 \Leftrightarrow -8x = -32 \Leftrightarrow x = 4.$

b) $\frac{3}{5}x - \frac{7}{10} < -\frac{2}{15}x \Leftrightarrow 18x - 21 < -4x \Leftrightarrow 22x < 21 \Leftrightarrow x < \frac{21}{22}.$

c) Linjens ekvation är $y - 7 = \dfrac{4-7}{2-1}(x-1) \Leftrightarrow 3x + y - 10 = 0.$ I skärningspunkten är $y = 0,$ vilket ger $3x - 10 = 0.$ Alltså är $x = \frac{10}{3}.$ Skärningspunkten är $\left(\frac{10}{3}, 0\right).$

2. **a)** $f'(x) = 3\cos(3x),$ så $f'\left(\frac{\pi}{9}\right) = 3\cos\frac{\pi}{3} = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$

b) $\overline{a} - \overline{b} = (4-2)\overline{i} + (1+3)\overline{j} + (-7+5)\overline{k} = 2\overline{i} + 4\overline{j} - 2\overline{k},$ alltså är $\left|\overline{a} - \overline{b}\right| = \sqrt{4+16+4} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}.$

c) Då $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ är $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{15}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}.$

3. **a)** $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = a+2\sqrt{a}\sqrt{b}+b=(a+b)+2\sqrt{ab}.$ Eftersom $\dfrac{a+b}{2}=2,$ är $a+b=4.$

Eftersom $a=\dfrac{1}{b},$ är $ab=1.$ Alltså är $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = 4+2\cdot 1=6.$

b) $\left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}\right)\left(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)=x^1-x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}+y^1=x+y.$

4. Anta att höjdens baspunkt på sidan AB är D och att $CD=h.$ Trianglarna ADC och CDB är likformiga, vilket ger

$$\frac{AD}{CD}=\frac{CD}{DB}.$$

Alltså är

$$\frac{7}{h}=\frac{h}{3}\Leftrightarrow h^2=21.$$

Då $h>0$ är $h=\sqrt{21}.$ Arean är

$$\frac{AB\cdot DC}{2}=\frac{10h}{2}=5h=5\sqrt{21}.$$

5. Vi betecknar $f(x)=\left(x^2-x-5\right)e^{-x}.$ Nollställena för derivatan

$$f'(x)=\left(x^2-x-5\right)e^{-x}(-1)+e^{-x}(2x-1)=\left(-x^2+3x+4\right)e^{-x}$$

får vi från ekvationen $-x^2+3x+4=0\Leftrightarrow x=4$ eller $x=-1.$ Nollstället $x=-1$ tillhör inte intervallet $x\geq 0.$ Eftersom $f(0)=-5,$ $f(4)=\dfrac{7}{e^4}\approx 0{,}1282$ och $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0,$ är funktionens minsta värde -5 och största värde $\dfrac{7}{e^4}.$

6. **a)** Sannolikheterna för komplementhändelserna är

P(inte B) $=1-0{,}17=0{,}83$ och
P(inte O) $=1-0{,}33=0{,}67.$

Då är
P(högst 9 O:n) = 1 – P(10, 11 eller 12 O:n)

$$=1-\left[\binom{12}{10}\cdot 0{,}33^{10}\cdot 0{,}67^2+\binom{12}{11}\cdot 0{,}33^{11}\cdot 0{,}67+0{,}33^{12}\right]$$

$$\approx 0{,}9995.$$

b) P(3 eller 4 B:n) $= \binom{12}{3} \cdot 0{,}17^3 \cdot 0{,}83^9 + \binom{12}{4} \cdot 0{,}17^4 \cdot 0{,}83^8 \approx 0{,}30.$

7. Sträckan AB:s mittpunkt är $M = \left(\frac{2+3}{2}, \frac{1+0}{2}, \frac{3+1}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 2\right)$. Planets normalvektor är

$$\overline{AB} = (3-2)\bar{i} + (1-0)\bar{j} + (3-1)\bar{k} = \bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k},$$

vilket betyder att planets ekvation är av formen $x + y + 2z + d = 0.$ Planet går genom punkten M, vilket ger $\frac{5}{2} + \frac{1}{2} + 4 + d = 0 \Leftrightarrow d = -7.$ Genom insättning av $x = 0$ och $z = 0$, får vi $y = 7.$ Skärningspunkten är $(0,7,0)$.

8. a) Vi får skärningspunkternas x-koordinater från ekvationen

$$12x^3 - 36x = -12x^2 + 36x \Leftrightarrow 12x^3 + 12x^2 - 72x = 0 \Leftrightarrow 12x(x^2 + x - 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -3 \vee x = 2.$$

Genom insättning av dessa värden får vi $(-3, -216)$, $(0,0)$ och $(2,24)$.

b) Vi betecknar $f(x) = 12x^3 - 36x$ och $g(x) = -12x^2 + 36x.$ Eftersom $f(x) \geq g(x)$ i intervallet $-3 \leq x \leq 0$ och $g(x) \geq f(x)$ i intervallet $0 \leq x \leq 2,$ är arean

$$\int_{-3}^{0} (f(x) - g(x))dx + \int_{0}^{2} (g(x) - f(x))dx$$

$$= \int_{-3}^{0} (12x^3 + 12x^2 - 72x)dx + \int_{0}^{2} (-12x^3 - 12x^2 + 72x)dx$$

$$= \Big/_{-3}^{0} \left(3x^4 + 4x^3 - 36x^2\right) + \Big/_{0}^{2} \left(-3x^4 - 4x^3 + 36x^2\right) = 253.$$

9. $\cos(2x) + \cos(3x) = 0 \Leftrightarrow \cos(3x) = -\cos(2x) \Leftrightarrow \cos(3x) = \cos(2x + \pi)$

$$\Leftrightarrow 3x = \pm(2x + \pi) + n2\pi \Leftrightarrow x = (2n+1)\pi \vee 5x = (2n-1)\pi$$

$$\Leftrightarrow x = (2n+1)\pi \vee x = \tfrac{2n-1}{5}\pi, \ n \in \mathbf{Z}.$$

10. Ett tvärsnitt av kuben är en rektangel, vars sidor utgörs av två av kubens motsatta kanter och två sidoytors diagonaler. Längderna av rektangelns sidor är 2 och $2\sqrt{2}$ och längden av dess diagonal är $2\sqrt{3}$. Anta att den lilla bollens radie är r och att avståndet från bollens medelpunkt till kubens hörn är x.

På grund av likformighet är $\frac{x}{r}=\frac{\sqrt{3}}{1}$, dvs. $x=r\sqrt{3}$. Summan $1+r+x=1+\left(1+\sqrt{3}\right)r$ är halva längden av rektangelns diagonal, vilket ger $1+\left(1+\sqrt{3}\right)r=\sqrt{3}$. Den lilla bollens radie är $r=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$.

11. Enligt definitionen av en aritmetisk talföljd är

$$\ln\left(2^x-2\right)-\ln 2=\ln\left(2^x+2\right)-\ln\left(2^x-2\right),$$

vilket ger

$$\ln\left(\frac{2^x-2}{2}\right)=\ln\left(\frac{2^x+2}{2^x-2}\right)\Leftrightarrow\frac{2^x-2}{2}=\frac{2^x+2}{2^x-2}\Leftrightarrow\left(2^x\right)^2-4\cdot 2^x+4=2\cdot 2^x+4$$

$$\Leftrightarrow\left(2^x\right)^2-6\cdot 2^x=0\Leftrightarrow 2^x\left(2^x-6\right)=0.$$

Då $2^x>0$ för varje $x\in\mathbf{R}$, måste $2^x-6=0\Leftrightarrow 2^x=6\Leftrightarrow x=\frac{\ln 6}{\ln 2}$.

12. a) Arean är $A(t)=2t\cos t$.

b) $A'(t)=-2t\sin t+2\cos t=0\Leftrightarrow\cos t-t\sin t=0$. Vi löser ekvationen med Newtons metod. Vi betecknar $f(t)=\cos t-t\sin t$, varvid $f'(t)=-2\sin t-t\cos t$. Rekursionsformeln i Newtons metod blir

$$t_{n+1}=t_n-\frac{\cos t_n-t_n\sin t_n}{-2\sin t_n-t_n\cos t_n},$$

med vilken vi genom iteration och startvärdet $t_0=1$ får $t_1\approx 0{,}8645$, $t_2\approx 0{,}8603$ och $t_3\approx t_2$. Lösningens närmevärde är med två decimalers noggrannhet $t\approx 0{,}86$.

c) Vi beräknar värdena $A(0)=0$, $A(\frac{\pi}{2})=0$ och $A(0{,}86)\approx 1{,}1$. Areans största värde är $1{,}1$.

13. a)

A	B	$A \,\square\, B$	$A \,\square\, (A \,\square\, B)$
1	1	0	1
1	0	1	0
0	1	0	0
0	0	0	0

b) Eftersom satsen $A \,\square\, (A \,\square\, B)$ är sann endast då både A och B är sanna, är den ekvivalent med satsen $A \wedge B$.

[*]**14. a)** $P(x) = x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1$, vilket ger $P(x) = (x+2)(x-1)$. (2 p.)

b) $\dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+2} = \dfrac{(A+B)x + (2A-B)}{(x-1)(x+2)} = \dfrac{1}{(x-1)(x+2)}$ för varje $x \geq 2$, vilket

gäller då

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A-B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{3} \\ B = -\frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{(2 p.)}$$

c) $$\int \frac{1}{x^2+x-2}\,dx = \int \frac{\frac{1}{3}}{x-1}\,dx - \int \frac{\frac{1}{3}}{x+2}\,dx = \tfrac{1}{3}\ln|x-1| - \tfrac{1}{3}\ln|x+2| + C$$

$$= \tfrac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + C = \tfrac{1}{3}\ln\frac{x-1}{x+2} + C, \text{ då } x \geq 2. \text{ (2 p.)}$$

d) Om $k > 2$ är

$$\int_2^k \frac{1}{P(x)}\,dx = \tfrac{1}{3}\Big/_{2}^{k} \ln\frac{x-1}{x+2} = \tfrac{1}{3}\left(\ln\frac{k-1}{k+2} - \ln\frac{1}{4}\right) = \tfrac{1}{3}\ln\left(4\cdot\frac{k-1}{k+2}\right)$$

$$= \tfrac{1}{3}\ln\left(4\cdot\frac{1-\frac{1}{k}}{1+\frac{2}{k}}\right) \to \tfrac{1}{3}\ln 4, \text{ då } k \to \infty.$$

Alltså är $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{P(x)}\,dx = \tfrac{1}{3}\ln 4$. (3 p.)

*15. **a)** Riktningskoefficienten för den till tangeringspunkten $\left(t, t^2\right)$ dragna tangenten är $2t$, och normalens ekvation är $y - t^2 = -\frac{1}{2t}(x-t)$. Normalen skär y-axeln då $y = t^2 + \frac{1}{2}$. Detta är y-koordinaten för cirkelns medelpunkt. Avståndet från medelpunkten till tangeringspunkten är

$$r = \sqrt{(t-0)^2 + (t^2 - y)^2} = \sqrt{t^2 + \frac{1}{4}},$$

vilket ger $t^2 = r^2 - \frac{1}{4}$. Alltså är $y = r^2 + \frac{1}{4}$. (3 p.)

b) Enligt deluppgift a har medelpunkten för cirkeln C_1 y-koordinaten $y_1 = \frac{5}{4}$ och medelpunkten för cirkeln C_2 y-koordinaten $(r_2)^2 + \frac{1}{4}$. Avståndet mellan medelpunkterna är alltså $y_2 - y_1 = r_2^{\ 2} - 1$. Samtidigt är avståndet mellan medelpunkterna summan av radierna $1 + r_2$. Vi får då ekvationen

$$(r_2)^2 - 1 = 1 + r_2 \Leftrightarrow (r_2)^2 - r_2 - 2 = 0 \Leftrightarrow r_2 = 2 \vee r_2 = -1.$$

Radien är positiv, vilket betyder att $r_2 = 2$. (2 p.)

c) Enligt deluppgift a har medelpunkten för cirkeln C_n y-koordinaten $y_n = r_n^{\ 2} + \frac{1}{4}$ och på motsvarande sätt har cirkeln C_{n+1} y-koordinaten $y_{n+1} = \left(r_{n+1}\right)^2 + \frac{1}{4}$. Då är avståndet mellan medelpunkterna $\left(r_{n+1}\right)^2 + \frac{1}{4} - (r_n)^2 - \frac{1}{4} = \left(r_{n+1}\right)^2 - (r_n)^2$.

Samtidigt är samma avstånd $r_n + r_{n+1}$. Vi får då ekvationen

$$\left(r_{n+1}\right)^2 - \left(r_n\right)^2 = r_n + r_{n+1} \Leftrightarrow \left(r_{n+1}\right)^2 - r_{n+1} = \left(r_n\right)^2 + r_n. \quad \text{(2 p.)}$$

d) Utgående från föregående deluppgift är $\left(r_{n+1}\right)^2 - r_{n+1} - \left(r_n\right)^2 - r_n = 0 \Leftrightarrow$

$$r_{n+1} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4\left(r_n^{\ 2} + r_n\right)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{(2r_n + 1)^2}}{2} = \frac{1 \pm (2r_n + 1)}{2},$$

av vilka endast den positiva lösningen $r_{n+1} = r_n + 1$ duger. (2 p.)