PROVET I MATEMATIK, KORT LÄROKURS 25.9.2013
BESKRIVNING AV GODA SVAR

De beskrivningar av svarens innehåll som ges här är inte bindande för studentexamens-nämndens bedömning. Censorerna beslutar om de kriterier som används i den slutgiltiga bedömningen.

Av en god prestation framgår det hur examinanden har kommit fram till svaret. I lösningen måste det finnas behövliga uträkningar eller andra tillräckliga motiveringar och ett slutresultat. I bedömningen fästs uppmärksamhet vid helheten och vid de tre stegen: starten, mellanstegen och slutresultatet. Räknefel som inte väsentligt ändrar uppgiftens natur ger ingen betydande sänkning av antalet poäng. Räknefel och fel i den matematiska modellen som ändrar uppgiftens natur kan däremot sänka antalet poäng betydligt.

I provet är räknaren ett hjälpmedel, och dess roll bedöms separat för varje uppgift. Om symbolräknare använts i en uppgift ska det framgå av prestationen. I lösningar av uppgifter som kräver analys räcker det inte enbart med ett svar som erhållits med hjälp av räknaren utan övriga motiveringar. Däremot räcker ett svar som examinanden fått med räknaren i allmänhet i rutinberäkningar. Detsamma gäller rutinmässiga delar av mera omfattande uppgifter. Exempel på sådana är omskrivning av uttryck, ekvationslösning och derivering och integrering av funktioner.

Uppgift 1

a) $x^2 - 4x + 4 = 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4.$

b) $2x + 3 = -(x+3) \Leftrightarrow 2x + 3 = -x - 3 \Leftrightarrow 3x = -6 \Leftrightarrow x = -2.$

c) $2(-2-2) + (2+2)^2 + 2(1-2) = -8 + 16 - 2 = 6.$

Uppgift 2

a) Vi får skärningspunkten med y-axeln genom att sätta in $x = 0$ i ekvationen $y = -3x + 12,$ vilket ger skärningspunkten $(0,12)$. Vi får skärningspunkten med x-axeln genom att sätta in $y = 0$ i ekvationen $y = -3x + 12,$ vilket ger att skärningspunkten är $(4,0)$.

b) Vi löser i den övre ekvationen ut $y = 4 - 2x$, vilket vi substituerar i den nedre ekvationen. Vi får då

$-x + 8 - 4x = 1 \Leftrightarrow -5x = -7 \Leftrightarrow x = \frac{7}{5}$. Då är $y = 4 - 2x = 4 - \frac{14}{5} = \frac{6}{5}$.

Lösningen är $\begin{cases} x = \frac{7}{5} \\ y = \frac{6}{5} \end{cases}$.

c) Den nya basen är $0{,}8 \cdot 11 = 8{,}8$ och den nya höjden $1{,}2 \cdot 7 = 8{,}4$. Den ursprungliga rektangelns area är $11 \cdot 7 = 77$ och den nya rektangelns area $8{,}8 \cdot 8{,}4 = 73{,}92$. Förhållandet mellan areorna är $\frac{73{,}92}{77} = 0{,}96$, dvs. arean minskar med 4 %.

Uppgift 3

a) Anta att halva toppvinkeln är α. Halva basen är 20 m och

$\sin\alpha = \frac{20}{90} \approx 0{,}2222 \Rightarrow \alpha \approx 12{,}84^\circ$, varvid toppvinkeln är $2\alpha \approx 26^\circ$.

b) Anta att triangelns höjd är h. Då är $\cos\alpha = \frac{h}{90} \Rightarrow h = 90\cos\alpha \approx 87{,}75$. Arean är

$\frac{40h}{2} = 20h \approx 1755$ m^2.

Uppgift 4

Vi behöver sammanlagt $10y + 20x + \pi x + 2\pi x = 10y + (20 + 3\pi)x$
$= 10 \cdot 40 + (20 + 3\pi) \cdot 20 = 800 + 60\pi$, alltså cirka 988 cm ribba.

Uppgift 5

Punkterna $(-1,0)$, $(1,-2)$ och $(3,0)$ ligger på kurvan, dvs. $\begin{cases} a - b + c = 0 \\ a + b + c = -2 \\ 9a + 3b + c = 0 \end{cases}$.

Genom att ledvis subtrahera de två första ekvationerna får vi $-2b = 2 \Leftrightarrow b = -1$. Genom att substituera $b = -1$ får vi $\begin{cases} a + c = -1 \\ 9a + c = 3 \end{cases}$. Genom att ledvis subtrahera ekvationerna får vi $-8a = -4 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$. Alltså är $c = b - a = -\frac{3}{2}$.

Uppgift 6

Rullens yttre radie är $R = 6,$ inre radie $r = 2,25,$ och anta att den efterfrågade rullens radie är $\rho.$ Den fulla rullens volym är $V_t = 21\pi\left(R^2 - r^2\right)$ och den efterfrågade rullens volym $V_p = 21\pi(\rho^2 - r^2).$ Av volymen är hälften kvar då

$$21\pi(\rho^2 - r^2) = \tfrac{21}{2}\pi(R^2 - r^2) \Leftrightarrow \rho^2 = \frac{R^2 + r^2}{2}.$$

Den efterfrågade rullens diameter är $2\rho = 2\sqrt{\frac{R^2 + r^2}{2}} = \sqrt{82{,}125}\ \text{cm} \approx 9{,}1\ \text{cm}.$

Uppgift 7

a) Bromssträckan uttryckt med hjälp av hastigheten v är $s(v) = kv^2,$ från vilket vi får konstanten k med ekvationen $s(40) = k \cdot 40^2 = 11 \Leftrightarrow k = \tfrac{11}{1600}.$ Den efterfrågade bromssträckan är

$$s(80) = \tfrac{11}{1600} \cdot 80^2\ \text{m} = 44{,}0\ \text{m}.$$

b) Vi får hastigheten med ekvationen $21{,}3 = kv^2$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{21{,}3 \cdot 1600}{11}}\ \text{km/h} \approx 56\ \text{km/h}.$$

Uppgift 8

Vi antar att de vita bollarna är n och de röda bollarna p till antalet, varvid det totala antalet bollar är $n + p$. Sannolikheten för att välja en röd boll är

$$\frac{p}{p+n} = 0{,}4 \Leftrightarrow 5p = 2p + 2n \Leftrightarrow p = \tfrac{2}{3}n.$$

Uppgift 9

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5,$ vilket ger $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12.$ Vi får derivatans nollställen med ekvationen $x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2,$ som båda tillhör intervallet $[-2, 4].$ Eftersom $f(-2) = 1,$ $f(-1) = 12,$ $f(2) = -15$ och $f(4) = 37,$ är det största värdet 37 och det minsta värdet $-15.$

Uppgift 10

Anta att den årliga tillväxtfaktorn är q och att omsättningen är $L.$ Med ekvationen $q^{20}L = 10L$ får vi $q^{20} = 10 \Leftrightarrow q = \sqrt[20]{10} \approx 1{,}122,$ dvs. den årliga ökningen har varit cirka $12{,}2\ \%.$

Uppgift 11

Utifrån tabellen

vitsord	antal	summa
10	n	$10n$
9	$2n$	$18n$
8	$3n$	$24n$
summa	$6n$	$52n$

är medelvärdet $\dfrac{52n}{6n} \approx 8,7$.

Uppgift 12

a) Då $a = 19$ är $T = 196 + k\lg\frac{19}{35} \approx 143$ cm.

Då $a = 23$ är $T = 200 + k\lg\frac{23}{35} \approx 163$ cm.

Då $a = 40$ är $T = 175 + k\lg\frac{40}{35} \approx 187$ cm.

b) Ekvationen $175 + k\lg\frac{a}{35} = 233$ ger

$$\lg\frac{a}{35} = \frac{233-175}{k} \approx 0,288 = b \Leftrightarrow \frac{a}{35} = 10^b \Leftrightarrow a = 35 \cdot 10^b \approx 67,93.$$

Resultatet 175 cm ska man hoppa som 68-åring.

Uppgift 13

Utifrån informationen i uppgiften får vi följande tabell

	antal/st.	totalt värde/€	total massa/g
guldslantar	k	$25k$	$20k$
silverslantar	h	$20h$	$10h$
totalt	$k+h$	$25k+20h$	$20k+10h$

Begränsningsvillkoren är $\begin{cases} k + h \le 60 \\ 20k + 10h \le 1000 \\ k \ge 0,\ h \ge 0. \end{cases}$

Begränsningslinjerna $h = 60 - k$ och $h = 100 - 2k$ skär varandra då $60 - k = 100 - 2k \Leftrightarrow k = 40,$ vilket ger $h = 20.$ Hörnpunkterna är $(0,0),\ (0,60),\ (40,20)$ och $(50,0).$

Värdet av påsens innehåll är $A(k,h) = 25k + 20h.$ Eftersom

$A(0,60) = 20 \cdot 60 = 1200,$

$A(40,20) = 1000 + 400 = 1400$ och

$A(50,0) = 50 \cdot 25 = 1250,$

lönar det sig att samla ihop 40 guld- och 20 silverslantar.

Uppgift 14

a) Placeringens värde i euro är $y = 1,035x + 1,055(12000 - x)$

$= -0,02x + 12660$, då $0 \leq x \leq 12000.$

b) Grafen utgör en del av en fallande linje i intervallet $0 \leq x \leq 12000.$

Uppgift 15

a) Eftersom $|\overline{a}|^2 = 1 + 4 + 4 = 9$ och $|\overline{b}|^2 = 1 + 4 = 5$ är

$2|\overline{a}|^2 + 2|\overline{b}|^2 = 18 + 10 = 28.$

b) Eftersom $\overline{a} + \overline{b} = \overline{i} + 3\overline{j}$ är $|\overline{a} + \overline{b}|^2 = 1 + 9 = 10.$ Eftersom

$\overline{a} - \overline{b} = \overline{i} + \overline{j} + 4\overline{k}$ är $|\overline{a} - \overline{b}|^2 = 1 + 1 + 16 = 18.$ Alltså är

$|\overline{a} + \overline{b}|^2 + |\overline{a} - \overline{b}|^2 = 28.$