PROVET I MATEMATIK, LÅNG LÄROKURS 25.9.2013
BESKRIVNING AV GODA SVAR

De beskrivningar av svarens innehåll som ges här är inte bindande för studentexamens-nämndens bedömning. Censorerna beslutar om de kriterier som används i den slutgiltiga bedömningen.

Av en god prestation framgår det hur examinanden har kommit fram till svaret. I lösningen måste det finnas behövliga uträkningar eller andra tillräckliga motiveringar och ett slutresultat. I bedömningen fästs uppmärksamhet vid helheten och vid de tre stegen: starten, mellanstegen och slutresultatet. Räknefel som inte väsentligt ändrar uppgiftens natur ger ingen betydande sänkning av antalet poäng. Räknefel och fel i den matematiska modellen som ändrar uppgiftens natur kan däremot sänka antalet poäng betydligt.

I provet är räknaren ett hjälpmedel, och dess roll bedöms separat för varje uppgift. Om symbolräknare använts i en uppgift ska det framgå av prestationen. I lösningar av uppgifter som kräver analys räcker det inte enbart med ett svar som erhållits med hjälp av räknaren utan övriga motiveringar. Däremot räcker ett svar som examinanden fått med räknaren i allmänhet i rutinberäkningar. Detsamma gäller rutinmässiga delar av mera omfattande uppgifter. Exempel på sådana är omskrivning av uttryck, ekvationslösning och derivering och integrering av funktioner.

Uppgift 1

a) $x^2+6x=2x^2+9 \Leftrightarrow x^2-6x+9=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{6\pm\sqrt{36-36}}{2}=3.$

b) $\dfrac{1+x}{1-x}=\dfrac{1-x^2}{1+x^2} \Leftrightarrow (1+x)(1+x^2)=(1-x)(1-x^2)$

$\Leftrightarrow x^3+x^2+x+1=x^3-x^2-x+1 \Leftrightarrow 2x(x+1)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=-1.$

c) Vi får nollställena med hjälp av ekvationen

$$x^2-9x+14=0 \Leftrightarrow x=\frac{9\pm\sqrt{25}}{2} \Leftrightarrow x=2 \vee x=7,$$

vilket ger att $x^2-9x+14=(x-2)(x-7).$

Uppgift 2

a) $P(x)=x^4-x^3+x \Rightarrow P'(x)=4x^3-3x^2+1.$ Vi får ekvationen $4x^3-3x^2+1=1$

$\Leftrightarrow x^2(4x-3)=0 \Leftrightarrow x^2=0 \vee 4x-3=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=\frac{3}{4}.$

b) $\int (4x+\cos(4x))dx = 2x^2 + \frac{1}{4}\sin(4x) + C.$

c) Talet a är 25 % mindre än talet b, dvs. $a = 0,75b.$ Förhållandet mellan talen är $\frac{b}{a} = \frac{b}{0,75b} = \frac{4}{3} \approx 1,33.$ Talet b är cirka 33 % större än talet a.

Uppgift 3

a) Anta att den efterfrågade vinkeln är φ. Eftersom $|\overline{a}| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$, $|\overline{b}| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$ och $\overline{a} \cdot \overline{b} = 3-2 = 1$, är

$$\cos\varphi = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}||\overline{b}|} = \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{10}} \approx 0,1414,$$

vilket ger $\varphi \approx 81,9^\circ$.

b) $\overline{a} \,||\, \overline{c} \Leftrightarrow \overline{c} = k\overline{a}$ för något $k \in \mathbf{R} \Leftrightarrow s\overline{i} + (1-s)\overline{j} = k\overline{i} - 2k\overline{j} \Leftrightarrow \begin{cases} s = k \\ 1-s = -2k \end{cases}$

Genom att substituera in $k = s$ i den nedre ekvationen får vi $1-s = -2s \Leftrightarrow s = -1.$

Uppgift 4

Om $k = 0$, är kurvorna desamma, dvs. tangenterna är inte vinkelräta mot varandra. Då $k \neq 0$, får vi skärningspunktens x-koordinat med hjälp av ekvationen $kx^2 = k(x-2)^2 \Leftrightarrow x-2 = \pm x \Leftrightarrow -2 = 0 \vee 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1.$ Med hjälp av derivatan får vi tangenternas riktningskoefficienter i skärningspunkten: $2k$ och $-2k.$ Kravet för ortogonalitet är $2k \cdot (-2k) = -1 \Leftrightarrow k^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow k = \pm\frac{1}{2}.$

Uppgift 5

Riktningsvektorerna och deras längder är $\overline{a} = \overline{i} - 2\overline{j} + 2\overline{k}$, $|\overline{a}| = \sqrt{1+4+4} = 3,$ och $\overline{b} = 3\overline{i} - 4\overline{k}$, $|\overline{b}| = \sqrt{9+16} = 5.$ Ortsvektorn för startpunkten är $\overrightarrow{OA} = \overline{i} - \overline{j}$. Eftersom $|\overline{a}| = 3,$ är den första förflyttningsvektorn $3\overline{a}.$ Eftersom $|\overline{b}| = 5,$ är den andra förflyttningsvektorn $2\overline{b}.$ Därmed är $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + 3\overline{a} + 2\overline{b} = (\overline{i} - \overline{j}) + 3(\overline{i} - 2\overline{j} + 2\overline{k}) + 2(3\overline{i} - 4\overline{k}) = 10\overline{i} - 7\overline{j} - 2\overline{k}$, dvs. $C = (10, -7, -2).$

Uppgift 6

Enligt bisektrissatsen får vi $CA = 4x$ och $CB = 3x$. Anta att α är hälften av vinkeln BCA. Men hjälp av cosinussatsen får vi

$$\begin{cases} 4^2 = (4x)^2 + 6^2 - 2 \cdot 4x \cdot 6\cos\alpha \\ 3^2 = (3x)^2 + 6^2 - 2 \cdot 3x \cdot 6\cos\alpha. \end{cases}$$

Vi multiplicerar den övre ekvationen med 3 och den nedre med -4 och adderar ekvationerna ledvis. Då får vi $12 = 12x^2 - 36 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$. Endast $x = 2$ duger, dvs. $AC = 4x = 8$ och $BC = 3x = 6.$

Uppgift 7

Eftersom $x^3 - x = x(x+1)(x-1)$, är uttryckets nollställen $-1, 0$ och 1, vilket betyder att uttrycket endast byter tecken i punkten $x = 1$ inom intervallet $[0, 2]$. En teckenundersökning visar att $x^3 - x \le 0$ då $0 \le x \le 1$, och $x^3 - x \ge 0$ då $1 \le x \le 2.$ Därmed är

$$\int_0^2 \left|x^3 - x\right| dx = \int_0^1 (-x^3 + x)dx + \int_1^2 (x^3 - x)dx$$
$$= \Big/_0^1 \left(-\tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{2}x^2\right) + \Big/_1^2 \left(\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{2}x^2\right) = 2\tfrac{1}{2}.$$

Uppgift 8

Om x riddare deltog båda dagarna, deltog $302 - x$ riddare endast första dagen och $285 - x$ riddare endast andra dagen. I turneringen deltog totalt 329 riddare, vilket ger $(302 - x) + x + (285 - x) = 329 \Leftrightarrow x = 258$. Den efterfrågade sannolikheten är $\frac{258}{329} \approx 78\,\%$.

Uppgift 9

Vi får x-koordinaterna för kurvornas skärningspunkter med ekvationen $2e^{-x} = x^2e^{-x} \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$. Sträckans längd är $f(x) = 2e^{-x} - x^2e^{-x}$, från vilket vi får

$$f'(x) = -2e^{-x} - 2xe^{-x} + x^2e^{-x} = e^{-x}(x^2 - 2x - 2).$$

Eftersom $e^{-x} > 0$ är $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{3}$,

av vilka $x = 1 + \sqrt{3}$ inte tillhör intervallet $\left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$. Eftersom det i intervallets ändpunkter gäller att $f\left(\pm\sqrt{2}\right) = 0$, är den största möjliga längden

$$f\left(1 - \sqrt{3}\right) = e^{\sqrt{3}-1}\left(2 - \left(1 - \sqrt{3}\right)^2\right) = 2e^{\sqrt{3}-1}\left(\sqrt{3} - 1\right) \approx 3{,}04.$$

Uppgift 10

Anta att bollarnas radie är r. Deras medelpunkter är belägna i hörnen av en regelbunden tetraeder. Tetraederns kant har längden $2r$, och varje sidoyta är en liksidig triangel som har höjden $\sqrt{3}\,r.$ Tetraederns höjd skär bottentriangeln i medianernas skärningspunkt, vars avstånd till bottentriangelns hörn är $\frac{2}{3}\sqrt{3}\,r.$ Enligt Pythagoras sats uppfyller tetraederns höjd h ekvationen

$$h^2+\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}r\right)^2=(2r)^2 \Leftrightarrow h^2=\frac{8}{3}r^2.$$

Konstruktionens höjd är $h+2r=\left(\sqrt{\frac{8}{3}}+2\right)r.$

Uppgift 11

Enligt trapetsmetoden

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx &\approx \tfrac{1}{5}\left(\tfrac{1}{2}f(0)+f(\tfrac{1}{5})+f(\tfrac{2}{5})+f(\tfrac{3}{5})+f(\tfrac{4}{5})+\tfrac{1}{2}f(1)\right)\\ &=\tfrac{1}{5}\left(\tfrac{1}{2}\cdot 1+5\sin\tfrac{1}{5}+\tfrac{5}{2}\sin\tfrac{2}{5}+\tfrac{5}{3}\sin\tfrac{3}{5}+\tfrac{5}{4}\sin\tfrac{4}{5}+\tfrac{1}{2}\sin 1\right)\approx 0{,}95.\end{aligned}$$

Uppgift 12

a) $R(x)=\dfrac{9x^2-1}{3x^2-5x-2}=\dfrac{9-\frac{1}{x^2}}{3-\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}}\to\dfrac{9}{3}=3,$ då $x\to\infty$.

b) $R(x)=\dfrac{9x^2-1}{3x^2-5x-2}=\dfrac{(3x+1)(3x-1)}{(3x+1)(x-2)}=\dfrac{3x-1}{x-2}\to\frac{6}{7},$ då $x\to-\frac{1}{3}$.

Uppgift 13

Motsatt antagande: $\sqrt[3]{2}\in\mathbf{Q}\Rightarrow\exists m,n\in\mathbf{Z}\colon\ \sqrt[3]{2}=\frac{m}{n}$, som är i förkortad form. Då gäller

$$2=\left(\frac{m}{n}\right)^3\Rightarrow m^3=2n^3.$$

Eftersom $2n^3$ är ett jämnt tal, är även m^3 ett jämnt tal. Då är även m ett jämnt tal, dvs. $\exists k\in\mathbf{Z}\colon\ m=2k\Rightarrow m^3=8k^3.$ Genom insättning i ekvationen ovan får vi $8k^3=2n^3\Rightarrow n^3=4k^3\Rightarrow n^3$ är jämnt $\Rightarrow n$ är ett jämnt tal. Detta är en motsägelse, eftersom vi antog att bråket $\frac{m}{n}$ var förkortat $\Rightarrow$ motsatta antagandet är falskt. Påståendet är sant.

Uppgift 14

a) Vi får skärningspunkterna med y-axeln genom att sätta in $x=0 \Rightarrow 2y^2+2y-4=0$ $\Leftrightarrow y=-2 \vee y=1$. Vi får skärningspunkterna med x-axeln genom att sätta in $y=0 \Rightarrow 2x^2-2x-4=0 \Leftrightarrow x=-1 \vee x=2$. Skärningspunkterna är $(0,-2)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ och $(2,0)$.

b) Skärningspunkterna är belägna symmetriskt med avseende på linjen $y=-x$. Om punkterna ligger på samma cirkel så måste det utifrån symmetrin gälla att cirkelns medelpunkt ligger på denna linje. Medelpunkten $\left(x_0,-x_0\right)$ är lika långt från punkterna $(2,0)$ och $(0,1)$, dvs.

$$\left(x_0-2\right)^2+\left(-x_0-0\right)^2=\left(x_0-0\right)^2+\left(-x_0-1\right)^2.$$

Vi får som lösning $x_0=\dfrac{1}{2}$. Punkten $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ har samma avstånd till alla fyra skärningspunkter, dvs. punkterna ligger på cirkeln. Medelpunkten är alltså $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ och för radien r gäller $r^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{10}{4}$. Cirkelns ekvation är

$$\left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2+\left(y+\tfrac{1}{2}\right)^2=\tfrac{10}{4} \Leftrightarrow x^2+y^2-x+y-2=0.$$

c) Linjen är $y=-x$. Genom att substituera in $y=-x$ i kurvans ekvation får vi

$$2x^2+2x^2+3x^2-2x-2x-4=0 \Leftrightarrow 7x^2-4x-4=0 \Leftrightarrow x=\frac{2\pm4\sqrt{2}}{7}.$$

Skärningspunkterna är $\left(\dfrac{2-4\sqrt{2}}{7},\dfrac{-2+4\sqrt{2}}{7}\right)$ och $\left(\dfrac{2+4\sqrt{2}}{7},\dfrac{-2-4\sqrt{2}}{7}\right)$.

d) Om kurvan var en cirkel så skulle dess ekvation vara densamma som ekvationen i deluppgift b. De i deluppgift c beräknade punkterna på kurvan satisfierar inte cirkelns ekvation, vilket betyder att den ursprungliga kurvan inte är en cirkel.

Uppgift 15

a) Graferna till funktionerna $f_0(x)=\left|\sin x\right|$, $f_1(x)=\frac{1}{2}\left|\sin(2x)\right|$, $f_2(x)=\frac{1}{4}\left|\sin(4x)\right|$ presenterade i intervallet $-\pi \le x \le \pi$.

b) Eftersom $\sin\left(2^k x\right)\ge 0$, då $0\le x\le \dfrac{\pi}{2^k}$, är enligt periodiciteten

$$\int_0^{\pi} f_k(x)dx=2^k\int_0^{2^{-k}\pi} f_k(x)dx=\int_0^{2^{-k}\pi}\sin(2^k x)dx=\frac{1}{2^k}\Big/_0^{\pi}-\cos\left(2^k x\right)=\frac{1}{2^{k-1}}.$$

De efterfrågade integralernas värden är 2, 1 och $\dfrac{1}{2}$.

c) $A_n = \sum_{k=0}^{n} \int_0^{\pi} f_k(x)dx = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{2\left(1-(\frac{1}{2})^{n+1}\right)}{1-\frac{1}{2}} = 4\left(1-(\frac{1}{2})^{n+1}\right).$

d) $A_n = 4\left(1-(\frac{1}{2})^{n+1}\right) \to 4,$ då $n \to \infty$.