YLIOPPILASTUTKINTOLAUTAKUNTA
STUDENTEXAMENSNÄMNDEN

Matematik, lång lärokurs 24.3.2021

Slutgiltiga beskrivningar av goda svar 18.5.2021

Grunderna enligt vilka bedömningen gjorts framkommer i de slutgiltiga beskrivningarna av goda svar. Uppgiften om hur bedömningsgrunderna tillämpats på examinandens provprestation utgörs av de poäng som examinanden fått för sin provprestation, de slutgiltiga beskrivningarna av goda svar och de föreskrifter gällande bedömningen som nämnden gett i sina föreskrifter och anvisningar. De slutgiltiga beskrivningarna av goda svar innehåller och beskriver inte nödvändigtvis alla godkända svarsalternativ eller alla godkända detaljer i ett godkänt svar. Eventuella bedömningsmarkeringar i provprestationerna anses vara jämställbara med anteckningar och sålunda ger de, eller avsaknaden av markeringar, inte direkta uppgifter om hur bedömningsgrunderna tillämpats på provprestationen.

Av en god prestation framgår det hur examinanden har kommit fram till svaret. I lösningen måste det ingå nödvändiga uträkningar eller andra tillräckliga motiveringar och ett slutresultat. I bedömningen fästs uppmärksamhet vid helheten och vid de tre stegen start, mellansteg och slutresultat. Räknefel som inte väsentligt ändrar uppgiftens natur ger ingen betydande sänkning av antalet poäng. Räknefel och fel i den matematiska modellen som ändrar uppgiftens karaktär kan däremot sänka antalet poäng avsevärt.

I provet är matematisk programvara ett hjälpmedel, och dess roll bedöms separat för varje uppgift. Om programvara använts i en uppgift ska det framgå av prestationen. I lösningar av uppgifter som kräver analys räcker det inte enbart med ett svar som erhållits med programvara utan övriga motiveringar. Däremot räcker ett svar som examinanden fått med ett program i allmänhet i rutinberäkningar. Detsamma gäller rutinmässiga delar av mera omfattande uppgifter. Exempel på sådana är omskrivning av uttryck, ekvationslösning samt derivering och integrering av funktioner.

Hur bedömningsanvisningarna ska tolkas

- Strukturen på en anvisning
  - I anvisningarna kallas en helhet som avslutas med ett poängantal i den högra kolumnen för en rad.
  - Uppdelade poäng i en rad är åtskiljda med /-tecknet I oklara fall har specificerats från vilken del som man får vilka poäng.
  - Det finns ingen specificering om det på raden finns lika många uträkningar som poäng - i så fall ges en poäng per uträkning.
  - Om en rad består av en uträkning och en motivering i ord i anknytning till den, så härrör hälften av poängen från uträkningen (avrundande uppåt) och resten från motiveringarna.
  - Om det på en rad endast finns en uträkning eller en formel och flera poäng, så får man delpoäng för ett tillräckligt bra försök (till exempel beräkning av derivatan delvis rätt).
  - En uträkning eller motivering i parentes på en rad är tilläggsinformation som inte behövs för att ge poäng.
  - Poäng i parentes ges automatiskt om följande rad är i skick.

- I allmänhet drar ett räknefel bort poäng från den rad som felet gäller men man kan få de följande radernas poäng om man gör uträkningarna/slutledningarna korrekt för de egna talen. Undantag är betecknade med denna färg. Man får dessa poäng endast om detta steg och även de föregående stegen är korrekt utförda. (Då ska lösningen bestå av korrekt tal eller uttryck eller motsvarande så när som på den ekvivalenta utformningen.) Textens röda färg påverkar inte utdelningen av poäng för avrundningar. Om det till exempel står 37 på svarsraden så duger också 37,5 och 40.
- Radernas beroende av varandra
  - I allmänhet är poänganvisingen skriven enligt lösingens matematiska progression och (fulla) poäng ges bara för motiverade steg. Om raderna är uppenbart oberoende av varandra (till exempel olika funktioners derivator har beräknats) ges poängen oberoende av prestationsordning utan särskild notering.
  - Om svaret är skrivet före motiveringarna betyder det att man för blotta (korrekta) svaret redan får poäng.
  - Beteckningen $\bigtriangledown$ i början av en rad betyder att radens poäng kan ges oberoende av de tidigare raderna; de följande raderna förutsätter denna rad på normalt sätt.
  - beteckningen • i början av en rad betyder att radens poäng kan ges oberoende av de tidigare raderna; de följande raderna förutsätter inte denna rad.
  - Beteckingen $\Rightarrow$ poängterar att man får de ifrågavarande poängen endast om de tidigare motiveringarna är i skick.
- Terminologi
  - ”Svar räcker” betyder att man kan få poäng för korrekt svar även utan motiveringar. Om svaret är felaktigt så kan man få poäng på basis av motiveringar enligt normala principer.
  - ”Startpoäng” betyder att härifrån kan man ge radens poäng om man inte får poäng från annat håll. Denna poäng kan alltså inte kombineras med andra poäng.
  - ”maxN” betyder att för en lösning av denna typ ges N poäng om det inte finns andra fel i lösningen.
  - ”Svaret endast som närmevärde” betyder att svarets exakta värde inte alls framgår i lösningen.

Följande avdrag är av sekundär betydelse för den uppgiftsspecifika poänganvisningen. På ett ställe kan man tillämpa flera avdrag, men man kan inte förlora intjänade poäng.

- Svaret korrekt, men inte i den efterfrågade formen (t.ex. noggrannhet, enhet) -1 p.
- Svaret är inte förenklat till slut i en förenklingsuppgift (t.ex. e^1, $\ln(e)$ eller 4^0) -2 p.
- Svaret är oförenklat i en annan uppgift (t.ex. e^1, $\ln(e)$ eller 4^0) -1 p.
- Uppenbara inmatningsfel i framställningen (t.ex. $x = 2$, $y04$), eller inmatningsfel som korrigeras direkt på följande rad -0 p.
- Kopieringsfel i svaret -1 p.
- Inga flera gällande siffror i en mellanavrundning än i svaret -1 p.

Följande avdrag är av sekundär betydelse för den uppgiftsspecifika poänganvisningen. På ett ställe kan man tillämpa flera avdrag, men vardera avdrag högst en gång

- Matematiskt bristfällig beteckning (t.ex. parenteser som fattas men korrekt beräknat; =-tecknet använt ”i kedja”, m^2 utan m). Obs! Beroende på situationen så kan en ostandardiserad beteckning godkännas som förklarad. -1 p.
- I lösningen saknas väsentliga förklaringar (läsarens måste gissa vad talen i lösningen betyder) ELLER motiveringarna och slutledningarna är framställda helt lösryckta (läsaren måste kombinera uttryck från olika delar av lösningen) -1 p.
- Betydande överflödig text eller överflödiga beräkningar i en lösning (läsaren måste dra slutsatser om hur lösningen utformas utifrån den givna informationen) -1 p.

Uppgiftsspecifika lösningar

Del A

1.

kan varken vara aritmetisk eller geometrisk	2
kan vara geometrisk	2
kan vara aritmetisk	2
9	2
3	2
Riktningskoefficienten för tangenten till funktionsgrafen. ELLER För ett felaktigt svar som är på rätt spår, som till exempel funktionens maximiställe".	2 1

2.

Insättning i formel $\sqrt{5^2+12^2}$	1
$\sqrt{169}$	(1)
13	1
$\pm$, $\bar{i}$ eller $\bar{j}$ har använts på ett felaktigt sätt eller beteckningen för skalär produkt saknas	-1

Examinanden har förstått betydelsen av motsatt riktade vektorer och minustecknet $[-\bar{u}]$.	1
$\triangledown$ Korrekt enhetsvektor ELLER koefficienten $\frac{5}{13}$ ELLER $\frac{25}{13}\bar{i}+\frac{60}{13}\bar{j}$.	1
$-\frac{25}{13}\bar{i}-\frac{60}{13}\bar{j}$ ELLER $-\frac{5}{13}\bar{u}$.	1
$-\frac{5}{13}(5\bar{i}+12\bar{j})$ räcker inte som förenklad form i svaret.	
ELLER	
Ett ekvationssystem bildas:	
villkor för längd $[x^2+y^2=5^2]$,	1
$\triangledown$ villkor för parallellitet $[x=5t,\ y=12t]$.	1
Ekvationssystemet är korrekt löst $[-\frac{25}{13}\bar{i}-\frac{60}{13}\bar{j}]$.	1
Endast korrekt svar	1
Startpoäng: en vektor som konstaterats vara parallell med och ha motsatt riktning som vektorn ELLER 5 enheter lång.	
Decimalapproximation (om periodiciteten klargjorts, så inget avdrag)	max2
Både exakt värde och närmevärde angivna.	max3

Riktningskoefficienten för linjen L är $[\frac{4-(-8)}{4-(-1)}=\frac{12}{5}]$ (1 p.) och jämförelse med riktningskoefficienten $[\frac{12}{5}]$ för vektorn $\bar{u}$ (1 p.) ELLER linjens riktningsvektor $[5\bar{i}+12\bar{j}$ ELLER $-5\bar{i}-12\bar{j}]$	2
$\Rightarrow$ motiverad slutsats för parallellitet.	1
Villkoret för vektorprodukt (kryssprodukt) beräknats som en skalär produkt.	+0
(Ett fel som följer med från föregående deluppgifter)	max3

Examinanden har satt in riktningskoefficienten och en punkt på linjen i ekvationen $y-y_0=k(x-x_0)$ ELLER ekvationen $y=kx+b$ $[y-4=\frac{12}{5}(x-4)]$	1+1
dvs. $y=\frac{12}{5}x-\frac{28}{5}$.	1
Koefficienter i blandad form eller decimalform	max3
Riktningskoefficienten har beräknats fel i den här deluppgiften	-1
(Ett fel som följer med från föregående deluppgifter)	max3

Talet $\sqrt{169}$ används i stället för talet 13 i lösningarna, allmänt avdrag	-1

3.

Vi förlänger uttycken i högra ledet: $\frac{1}{2+x}+\frac{1}{2-x}=\frac{2-x}{(2+x)(2-x)}+\frac{2+x}{(2-x)(2+x)}$	
(första poängen ges om en term är korrekt eller för strategin)	2
$(=\frac{2-x+2+x}{4-x^2})=\frac{4}{4-x^2}$.	2
ELLER	
Likheten $4-x^2=(2+x)(2-x)$ används.	1
(Strategipoäng) Ledvis multiplikation med uttrycket $4-x^2$ ELLER uttrycken $2+x$ och $2-x$.	1
Genom att skriva om ekvationen får man en identiskt sann ekvation [$4=4$].	2
Feltolkning: nollställena till nämnarna har lösts ut.	+0

$\int_{-1}^{1}\frac{1}{2+x}\,dx=\Big/_{-1}^{1}\ln\lvert 2+x\rvert$	2
$=\ln 3-\ln 1=\ln 3$.	2
I stället för absolutbelopp $\ln(2+x)$	−0
En överflödig integrationsskonstant i svaret	−1
Fel integralfunktion, som inte beror på ett kopieringsfel eller skrivfel, exempelvis $\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2}+\frac{1}{x}$ eller $\int_{-1}^{1}\frac{1}{2+x}\,dx=\Big/_{-1}^{1}-\frac{1}{(2+x)^2}$.	max0

Deluppgift 3.1 används för att skriva om uttrycket $\frac{1}{4-x^2}$	(1)
dvs. $\frac{1}{4-x^2}=\frac{1}{4}(\frac{1}{2+x}+\frac{1}{2-x})$.	1
$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{2+x}=\ln 3$ (deluppgift 3.2)	
$\bigtriangledown$ $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{2-x}=\ln 3$ (symmetri eller beräkning)	1
Integralernas värden har adderats [$\frac{2}{4}\ln 3$, $\frac{1}{4}\ln 9$ ELLER $\frac{1}{2}\ln 3$ (eller motsvarande)].	1
Konstaterats att inre funktionens derivata $-2x$ saknas.	+0
Koefficienten $\frac{1}{4}$ saknas.	−1

Svaret som närmevärde utan slutlig förenkling [exempelvis $\ln 3-\ln 1\approx 1{,}0986$].	−1

4.	Derivatan används ELLER en början till derivering framgår.	1
	Det framgår att examinanden använt deriveringsregeln för en sammansatt funktion eller för en produkt/kvot.	1
	Deriveringsregeln för en sammansatt funktion eller för en produkt/kvot har i huvuddrag använts korrekt.	1
	$\triangledown$ Deriveringsregeln för tangens har använts korrekt.	1
	$f'(x)$ är $\frac{2+\tan^2 x-\tan^4 x}{(2+\tan^2 x)^2}$ ELLER $\frac{1+\tan^2 x}{(2+\tan^2 x)^2}(2-\tan^2 x)$ ELLER $\frac{2-\tan^2 x}{\cos^2 x(2+\tan^2 x)^2}$.	1
	Nollstället $\tan x = \sqrt{2}$ är relevant.	1
	Motiveringar till varför övriga nollställen förkastas.	1
	• Utgående från figuren får funktionen sitt största värde i derivatans nollställe ELLER teckenschema ELLER derivatans nollställe har kontrollerats samt $f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = 0$.	1
	Det största värdet är $(\frac{\sqrt{2}}{2+2} =)$ $\frac{\sqrt{2}}{4}$.	1
	ELLER	
	• Variabelbyte $t = \tan\alpha$.	1
	Uttrycket $g(t) = \frac{t}{2+t^2}$.	2
	Derivatan $g'(t) = \frac{1}{2+t^2} - \frac{2t^2}{(2+t^2)^2}$.	2
	Nollstället $t = \sqrt{2}$.	1
	• Tangensfunktionen är växande i intervallet $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$ och den får värdena $[0,\infty)$.	1
	• Utgående från figuren får funktionen sitt största värde i derivatans nollställe ELLER teckenschema ELLER derivatans nollställe har kontrollerats samt $f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = 0$.	1
	Det största värdet är $(g(\sqrt{2}) =)$ $\frac{\sqrt{2}}{4}$.	1
	Endast närmevärden	−1

Ekvationen $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.	(1)
$\alpha = 2\tan^{-1}\frac{\sqrt{2}}{4}$ ELLER $\frac{\alpha}{2} \approx 19{,}47^\circ\,(+n180^\circ)$ ELLER $\frac{\alpha}{2} \approx 0{,}3398\,(+\pi n)$	1
39° (denna noggrannhet)	1
På den andra raden får man poängen för radianberäkningarna om det framgår att det är fråga om radianer (exempelvis en senare omvandling till grader) Typfel $M = 1$ leder till värdet $2\tan^{-1} 1 = 90^\circ$	0+1+0

Del B1

5.

Anta att rektangelns sidor är x och y, av vilka y är den sida som ligger på strandlinjen ELLER en figur av situationen har ritats (en triangel och en rektangel har skisserats).	1
Komplementära sträckor med längderna $120 - x$ ELLER $150 - y$	1
Examinanden har med stöd av likformighet kommit fram till att	1
$\frac{y}{150} = \frac{120-x}{120}$ ELLER $\frac{150-y}{150} = \frac{x}{120}$ (eller motsvarande)	2
$\Rightarrow x = \frac{150-y}{150} \cdot 120$.	1
Arean är $A(y) = \frac{150-y}{150} \cdot 120 \cdot y = \frac{120(150-y)y}{150}$.	2
Derivatan är $A'(y) = \frac{120}{150}(150 - 2y)$.	1
$A'(y) = 0$, då $y = 75$, och motivering för att det är fråga om ett maximiställe.	1
Då är $x = 60$.	1
• Längderna på de efterfrågade sidorna är alltså 75 (m) och 60 (m).	1
ELLER	
Anta att rektangelns sidor är x och y, av vilka y är den sida som ligger på strandlinjen ELLER en figur av situationen har ritats (en triangel och en rektangel har skisserats).	1
Korrekt figur i rätt proportioner.	(1)
I figuren har märkts ut koordinaterna för de kritiska punkterna (eller motsvarande), exempelvis en rätvinklig triangel vars hörnpunkter är origo, $(120, 0)$ och $(0, 150)$.	1
Hypotenusalinjens ekvation är $y = -\frac{150}{120}(x - 120) = -\frac{5}{4}x + 150$.	2
Hörnens koordinater är alltså $\left(x, -\frac{5}{4}x + 150\right)$.	1
Raderna 6–10 som ovan.	6
Maximeringen kan göras med programvara då uttrycket har tagits fram.	
Maximeringspunkterna (4 p.) får man (också med programvara), om $y \mapsto A(y)$ är en nedåtvånd parabel, som ger en förnuftig lösning.	
Närmevärden är ok, för grov avrundning enligt de allmänna anvisningarna.	
Graafisk lösning genom prövning ELLER tabellmetod.	+0

6.

Anta att volymen av det ursprungliga kärlet är V och dess area är A.	1
Volymen av det nya kärlet är $\frac{1}{4}V$.	1
Längdskalan är $k = \left(\frac{1}{4}\right)^{1/3}$ ELLER $k = 4^{1/3}$.	(2)
Areaskalan är k^2 [den nya arean är $\left(\frac{1}{4}\right)^{2/3} A$].	2
Förhållandet mellan arean och volymen i det nya kärlet är alltså $\frac{(\frac{1}{4})^{2/3}A}{\frac{1}{4}V} = 4^{1/3}\frac{A}{V}$.	2
Förhållandet $\frac{4^{1/3}\frac{A}{V} - \frac{A}{V}}{\frac{A}{V}}$ (3 p.) ELLER $\frac{4^{1/3}\frac{A}{V}}{\frac{A}{V}}$ (2 p.) och $\frac{4^{1/3}\frac{A}{V}}{\frac{A}{V}} - 1$ (1 p.).	3
$(4^{1/3} - 1 \approx)$ 58,740105 %.	1
Alla noggrannheter duger; närmevärde i ett mellansteg med tillräcklig noggrannhet är ok	
Formeln $V = Ah$ (eller motsvarande) utan allmänt kärl.	+0
Förhållandet felaktigt svängt.	+0
Om mängden smakämnen satts till $\frac{A}{V}$ utan koefficient, så från femte poängraden	-1
”Vi antar att $V = 1$” utan motiveringar.	-2
”Vi antar att kärlet är en kub” (eller motsvarande) utan motiveringar $(0 + 0 + 1 + 0 + 1 + 3 + 1)$.	max6

7.	$\frac{3}{6}$, $\frac{1}{2}$, 0,5 ELLER 50 % + motivering ($\frac{3}{6}$ duger även som motivering).	1+1
	Lisa kommer till Kairo tidigast på tredje kastet om hon får 1 på det första och på det andra kastet, sannolikhet: $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}$;	1
	på det första 1 och på det andra 2: $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}$; på det första 2 och på det andra 1: $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}$ ELLER två sätt att få 1 och 2.	1
	Addition av egna termer (minst 2 st).	1
	Examinanden har fått $\frac{1}{12}$ (= 0,083 ...).	1
	Granskning av serier på fyra eller tre kast: korrekt granskat fall (exempelvis uttrycket $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{6}{6}$ i fallet tre ettor och en 1–6) 1 p., alla övriga fall korrekta 2 p., addition av egna termer (minst 2 st) 1 p.	
	ELLER (med hjälp av komplementregeln)	
	Beteckning med $p(j)$ att man kommer fram på j kast. Beräkning med hjälp av komplementregeln $1-p(1)-p(2)$. Lisa vinner på andra kastet om: det första kastet är tre och det andra är vilket som helst, det ena kastet är 2 och det andra minst 2 eller det första kastet är 1 och det andra är minst 3.	2
	De gynnsamma utfallen är alltså 15 till antalet, dvs. $p(2)=\frac{15}{36}$ (Obs! Poäng också i deluppgift 7.3).	1
	Den efterfrågade sannolikheten är $1-p(1)-p(2)=1-\frac{1}{2}-\frac{15}{36}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$ (= 0,083 ...).	1
	ELLER (med hjälp av utfall)	
	Lisa behöver flera än två kast exakt då hon på de två första kasten får $1,1$ eller $1,2$ eller $2,1$.	2
	$\triangledown$ Man kan kasta en tärning två gånger på $6\cdot 6=36$ olika sätt.	(1)
	Sannolikheten är alltså $\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$ (= 0,083 ...).	1
	Sannolikheten för händelsen "exakt två kast"är $\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$. (Möjligen beräknat redan i deluppgift 7.2.).	1
	Sannolikheten för händelsen ”exakt fyra kast” $\frac{1}{6^3}=\frac{1}{216}$.	1
	Sannolikheten för att komma fram på tre kast är därmed $\frac{3}{36}-\frac{1}{216}=\frac{17}{216}$.	2
	$\triangledown$ Väntevärdet är $\frac{1}{2}+2\cdot\frac{15}{36}+3\cdot\frac{17}{216}+4\cdot\frac{1}{216}$	1
	$=\frac{343}{216}$ ELLER $\approx 1{,}587\,962\,962$.	1
	I decimalsvaren duger alla noggrannheter som har minst två gällande siffror. Endast beräkningar utan förklaring, 2/1+0+0+1/0+1+0+1+1.	max7
	Examinanden har undersökt situationen att Lisa måste komma fram med ett exakt ögontal.	+0

8.

Lottning av 1000 talpar i korrekta intervall OCH kommando eller en noggrann förklaring.	2+1
testning av villkoret OCH kommando eller noggrann förklaring.	1+1
beräkning av antalet.	1

Exempel på en kalkylprogramslösning. På olika lottningsomgångar får man olika tal. En körning ger därmed bara ett exempel på meningfulla tal, som kalkylprogrammet kan ge.

Exempelkod:

```
import random
n=1
k=0
while n<1001:
    x=random.uniform(0,2)
    y=random.uniform(0,4)
    if x*x<=y:
        k=k+1
    n=n+1
print(k)
```

Pseudokodlösning	max6
I en del av lösningarna har lottning av heltal använts. Genom att lotta ut heltalen från ett stort intervall och använda skalning så kan man konstruera en lösning som ger fulla poäng. Å andra sidan har man också lottat ut decimaltal, men valt inställningarna så att enbart heltalsdelen syns.	
I tabellen syns bara heltal, men av lösningen framgår att man har använt decimaltal.	max6
I tabellen syns bara heltal i intervallet 0–4, och det framgår ingenstans att man har använt decimaltal.	max4
Heltal utlottade + skalning.	max6

Medelvärde 665.	1
Kommando eller uttryck som motivering.	1
▽ Arean är alltså ungefär $\frac{665}{1000}$ av hela rektangeln,	(2)
dvs. $\frac{665}{1000} \cdot 2 \cdot 4 \approx 5{,}3$.	2
Arean har beräknats utan att utskriften av Hillevis programkörning använts på ett passande sätt.	0

9.

• Examinanden har konstaterat att funktionen är kontinuerlig i övriga punkter än punkten $x = 0$.	1
Det högersidiga gränsvärdet är $\lim_{x\to 0+}(ax+1)^2 + a(1-a) = 1 + a - a^2$.	1
Det vänstersidiga gränsvärdet $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$ ELLER ”den vänstra delfunktionens” kontinuitet.	1
En ekvation har bildats där gränsvärdena är lika stora $[1 + a - a^2 = 1]$.	1
• I ekvationen har även funktionsvärdet $f(0) = 1$ beaktats ELLER ”den vänstra delfunktionens” kontinuitet.	1
Svaret $a = 0$ eller $a = 1$.	1
Raderna 2–6 kan lösas med solve-kommandot	max6
Löst utan gränsvärde utan att man hänvisat till ”delfunktionernas” kontinuitet $(1 + 0 + 0 + 1 + 1 + 1)$	max4
Lösning med programvara och prövning med glidare $0 + 1 + 0 + 0 + 0 + 1$.	max2

• Examinanden har konstaterat att funktionen är deriverbar i övriga punkter än punkten $x = 0$.	1
Differenskvoten från vänster är $E_1 = \lim\limits_{h\to 0^-} \frac{(h^3+1)-1}{h}$.	1
Differenskvoten från höger är $E_2 = \lim\limits_{h\to 0^+} \frac{(ah+1)^2+a(1-a)-1}{h}$.	1
Ekvationen $E_1 = E_2$.	1
$\bigtriangledown$ Av deriverbarhet följer kontinuitet, vilket med stöd av deluppgift 9.1 betyder att $a = 0$ och $a = 1$ är de enda möjliga värdena.	(1)
Det här uppfylls bara då $a = 0$.	1
Examinaden har beräknat $E_2 = \lim\limits_{h\to 0^+} \frac{(ah+1)^2+a(1-a)-(1+a(1-a))}{h}$ utan att hänvisa till kontinuiteten.	-1
Grafiskt uteslutit $a = 1$ och undersökt fallet $a = 0$ som ovan.	max5
Grafisk lösning $(1 + 0 + 0 + 0 + 1 + 0)$	max2
ELLER	
• Examinanden har konstaterat att funktionen är deriverbar i övriga punkter än punkten $x = 0$.	1
Derivatans gränsvärde från höger: $\lim\limits_{x\to 0^+} 2(ax+1)a = 2a$.	1
Derivatans gränsvärde från vänster $\lim\limits_{x\to 0^-} 3x^2 = 0$.	1
Examinanden har bildat en ekvation och fått $a = 0$ (inte ännu tilläggspoäng för detta).	
Med stöd av deluppgift 9.1 är funktionen kontinuerlig då $a = 0$, vilket betyder att det här villkoret uppfylls endast då $a = 0$.	2
Den här slutledningen är giltig eftersom derivatans gränsvärde existerar ELLER eftersom delfunktionerna är kontinuerligt deriverbara.	1
Derivatan har beräknats i origo i stället för gränsvärdet, utan motiveringar.	-1

De första poängen kommer inte genom att konstatera att det räcker med att granska punkten $x = 0$ utan man måste konstatera kontinuitet/deriverbarhet i övriga punkter.	

Del B2

10.

(a) bevis, (b) definition, (c) sats	3
Den här deluppgiften behöver inte motiveras och motiveringar beaktas inte. Inga poäng i deluppgiften om man använder flera svar i den ["(b) är både en definition och en sats"].	

• Korrekt antagande, dvs. längderna a, b och c på triangelns sidor satisfierar villkoret $a^2 + b^2 = c^2$.	2
• Korrekt slutledning, triangeln är rätvinklig.	2
Ex. "Om en triangel satisfierar Pythagoras sats, så är den rätvinklig".	0+2
Ekvivalens i stället för implikation i påståendet.	-1
Examinanden har kallat påståendet Pythagoras sats, och skrivit ner det korrekta innehållet.	4
Otydligt men korrekt ["Den omvända satsen till Pythagoras sats"].	3
Examinanden har endast svarat "Pythagoras sats".	0
Något annat än (a) har valts som bevis.	0

Anta att talets tiopotensframställning är $a_m a_{m-1} \dots a_1 a_0$.	(1)
Det här betyder att $n = a_0 + 10a_1 + 100a_2 + \cdots + 10^m a_m$ och	1
att siffersumman till talet n är $a_m + a_{m-1} + \cdots + a_1 + a_0$.	1
Därmed är $n \equiv a_m + a_{m-1} + \cdots + a_1 + a_0 \pmod 3$,	1
eftersom $10^k \equiv 1 \pmod 3$.	1
Startpoäng: $10 \equiv 1 \pmod 3$, exempelvis i samband med prövning ELLER ett icke-trivialt exempel där satsen fungerar (ex. $3 \mid 72$ och $3 \mid (7+2)$).	1
Examinanden har behandlat endast tresiffriga tal.	max3
Examinanden har visat (b) genom att använda en logaritmformel [ex. $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$].	max2

11.	Logaritmen av båda talen tas.	1
	Med räkereglerna för logaritm fås $100^{101}\lg 99$ och $100^{99}\lg 101$.	1
	$100^{101}\lg 99 \approx 1{,}996 \cdot 10^{202}$ och $100^{99}\lg 101 \approx 2{,}004 \cdot 10^{198}$ ELLER förkortat med 100^{99}	1
	$\Rightarrow$ talet $99^{100^{101}}$ är större.	1
	ELLER	
	Man tar den 100^{99}:e roten av båda talen.	2
	Då återstår talen 99^{100^2} och 101 att jämföras med varandra.	1
	Det första är det större av de här talen.	1
	ELLER	
	En förnuftig strategi (rot, logaritm, motsvarande).	1
	Examinanden har genomfört strategin.	2
	Korrekt slutsats.	1
	Typfel $99^{100^{101}} = 99^{100\cdot 101}$ eller annat motsvarande (1+1+0+0) Obs. Man får inga poäng om dessa felaktiga uttryck endast är inmatade i räknaren utan en fungerande strategi.	max2
	Ett svar utan motiveringar ELLER en räknarmotivering och talen inte är tillräckligt små, så att man kan lita på räknaren.	0
	Startpoäng: Prövning med mindre tal (ex. 2^{3^4} och 4^{3^2}) och korrekt slutsats ELLER för exponenterna gäller att $100^{101} \gg 100^{99}$.	1

• Rekursionsformeln har använts på ett korrekt sätt	(1)
$1 = a_7 + a_3$ (given formel då $n = 3$).	1
$\triangledown$ Eftersom $a_1 = 1 = a_2$ gäller det att $a_3 = 0$.	1
Därmed är $a_7 = 1$.	1
$\triangledown$ Rekusionsformeln används ”nedåt”:	
$1 = a_{2021} + a_{1010} = a_{2021} + a_{505}$.	2
Fortsättning på samma sätt:	
$1 = a_{505} + a_{252} = a_{505} + a_{126} = a_{505} + a_{63}$,	
$1 = a_{63} + a_{31}$,	
$1 = a_{31} + a_{15}$,	
$1 = a_{15} + a_7$.	1
Eftersom $a_7 = 1$, löser man genom att substituera tillbaka [$a_{15} = 0$, $a_{31} = 1$, $a_{63} = 0$, $a_{505} = 1$ och] $a_{2021} = 0$.	1
Uppgiften kan även lösas genom att man använder sig av rekursionsformeln $a_{2n+1} + a_{2n} = 1$.	max8
För den nästsista raden behöver man inte visa alla ekvationer, så länge som lösningen framskrider på ett logiskt förståeligt sätt.	
Rekursionformlerna är felaktigt kopierade och examinanden har fått motsvarande lösning.	max6
Uppgiften kan lösas med tabell om examinanden noggrant har förklarat hur rekursionen är genomförd.	

12.	Bollarnas medelpunkter bildar en liksidig triangel vars sida är 6.	2
	Avståndet från triangelns hörn till den punkt i triangeln som ligger lika långt från triangelns alla hörn är $\frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$.	2
	• Examinaden har beräknat något tredimensionellt avstånd.	(1)
	Avståndet från medelpunkten för en liten boll till den stora halvsfärens medelpunkt är $\sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{16} = 4$.	2
	Den stora halvsfärens radie utgörs av summan av det föregående nämnda avståndet och radien av en liten boll $[3 + 4 = 7]$.	2
	Motivering: Den radie som går från tangeringspunkten mellan den stora halvsfären och en liten boll till medelpunkten av den stora halvsfären förenas med den lilla bollens radie.	3
	Närmevärden använts (-1 p. för det första närmevärdet och -1 p. för svaret).	max10
	Man kan lösa de olika skedenas uträkningar med grafisk programvara genom att följa lösningsmodellen ovan.	max12
	Om man avviker från lösningsmodellen för prövning samt om svaret ligger i intervallet [6,9; 7,1], ges 1 p för svaret. (innehåller svarets närmevärdesavdrag).	
	Startpoäng: figur där tre lika stora bollar tangerar varandra ELLER en planprojektion av samma situation. Figuren kan även vara felaktig till övriga delar.	1
	Bollarna är avbildade i en egendomlig konfiguration.	+0

13.	$P(x) = (x-2)(x-3)$ och $Q(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)$ ELLER $P(x) = x^2 - 5x + 6$ och $Q(x) = x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6}$.	(1)
	$\Rightarrow p_2 = 1,\ p_1 = -5$ och $p_0 = 6$ och $q_2 = 1,\ q_1 = -\frac{5}{6}$ och $q_0 = \frac{1}{6}$.	1
	$P(x) = (x-2)(x-3) \Rightarrow p_2 = 1,\ p_1 = -5$ och $p_0 = 6$	1

	$P(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2) = x^2 - \alpha_1 x - \alpha_2 x + \alpha_1\alpha_2$, dvs.	1
	• $p_2 = 1,\ p_1 = -(\alpha_1 + \alpha_2)$ och $p_0 = \alpha_1\alpha_2$.	1
	$Q(x) = (x - \frac{1}{\alpha_1})(x - \frac{1}{\alpha_2}) = x^2 - \frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1\alpha_2}x + \frac{1}{\alpha_1\alpha_2}$, dvs.	1
	• $q_2 = 1,\ q_1 = -\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1\alpha_2}$ $[= -\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2}]$ och $q_0 = \frac{1}{\alpha_1\alpha_2}$.	1
	Upprepat teckenfel $p_1 = \alpha_1 + \alpha_2$ och $q_1 = \frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1\alpha_2}$, i övrigt korrekt.	3
	Startpoäng: $P(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$ ja $Q(x) = (x - \frac{1}{\alpha_1})(x - \frac{1}{\alpha_2})$.	1

	Polynomet P granskas för variabelvärdet $\frac{1}{x}$:	1
	$P\left(\frac{1}{x}\right) = (\frac{1}{x} - \alpha_1)(\frac{1}{x} - \alpha_2)\cdots(\frac{1}{x} - \alpha_n)$	1
	$= \frac{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}{x^n}(\frac{1}{\alpha_1} - x)(\frac{1}{\alpha_2} - x)\cdots(\frac{1}{\alpha_n} - x)$	1
	$= (-1)^n\frac{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}{x^n}(x - \frac{1}{\alpha_1})(x - \frac{1}{\alpha_2})\cdots(x - \frac{1}{\alpha_n})$,	1
	dvs. $(-1)^n\frac{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}{x^n}Q(x) = P(\frac{1}{x})$.	
	Å andra sidan är $(-1)^n\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n = p_0$	1
	$\Rightarrow q_i = \frac{p_{n-i}}{p_0}$.	1
	ELLER	
	Polynomet P har multiplicerats ut (synligt minst fram till p_2 eller från p_{n-2}).	1
	Polynomet Q har multiplicerats ut (synligt minst fram till q_2 eller från q_{n-2}).	1
	• De allmänna koefficienterna p_j och q_j till polynomen P och Q är utskrivna med hjälp av talen α_i.	1
	• Sambandet $q_j = \frac{p_{n-j}}{p_0}$ har tagits fram ELLER $q_j = (-1)^n\frac{p_{n-j}}{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}$.	1
	Det föregående nämnda sambandet är motiverat i åtminstone ett fall $1 < j < n-1$	1
	Motiverat $q_j = \frac{p_{n-j}}{p_0}$ för varje j.	1
	Startpoäng: Motiverat att $q_1 = \frac{p_{n-1}}{p_0}$ ELLER koefficienten $q_{n-1} = \frac{p_1}{p_0}$.	1
	Indexen är på samma sätt systematiskt felaktiga.	-1