YLIOPPILASTUTKINTOLAUTAKUNTA
STUDENTEXAMENSNÄMNDEN

Matematiikka, pitkä oppimäärä 24.3.2021

Lopulliset hyvän vastauksen piirteet 18.5.2021

Hyvästä suorituksesta näkyy, miten vastaukseen on päädytty. Ratkaisussa on oltava tarvittavat laskut tai muut riittävät perustelut sekä lopputulos. Arvioinnissa kiinnitetään huomiota kokonaisuuteen, ja ratkaisu pyritään arvioimaan kolmiosaisesti: alku, välivaiheet ja lopputulos. Laskuvirheet, jotka eivät olennaisesti muuta tehtävän luonnetta, eivät alenna pistemäärää merkittävästi. Sen sijaan tehtävän luonnetta muuttavat lasku- ja mallinnusvirheet saattavat alentaa pistemäärää huomattavasti.

Matemaattiset ohjelmistot ovat kokeen apuvälineitä, joiden roolit arvioidaan tehtäväkohtaisesti. Jos ratkaisussa on käytetty ohjelmistoja, sen on käytävä ilmi suorituksesta. Analysointia vaativien tehtävien ratkaisemisessa pelkkä ohjelmistolla saatu vastaus ei riitä ilman muita perusteluja. Sen sijaan ohjelmasta saatu tulos yleensä riittää rutiinitehtävissä ja laajempien tehtävien rutiiniosissa. Tällaisia ovat esimerkiksi lausekkeiden muokkaaminen, yhtälöiden ratkaiseminen sekä funktioiden derivointi ja integrointi.

Miten pisteytysohjeita luetaan

- Ohjeen rakenne
  - Ohjeessa riviksi kutsutaan kokonaisuutta, joka päättyy oikeassa sarakkeessa olevaan pistemäärään.
  - Rivin useat pisteet on erotettu /-merkillä. Epäselvissä tapauksissa on suluissa eritelty, mistä osasta saa mitäkin pisteitä.
  - Erittelyä ei ole, jos rivillä on saman verran laskuja kuin pisteitä, tällöin yksi piste laskua kohden.
  - Jos rivillä on yksi lasku ja siihen liittyvä sanallinen perustelu, niin puolet pisteistä (pyöristettynä ylös) saa laskusta ja loput perusteluista.
  - Jos rivillä on vain yksi lasku tai kaava ja useampi piste, saa osapisteet riittävän hyvästä yrittämisestä (esim. derivaatan laskeminen osittain oikein).
  - Rivillä suluissa oleva lasku tai perustelu on lisätietoa, eikä sitä vaadita pisteiden saamiseen.
  - Suluissa olevat pisteet saa automaattisesti, jos seuraava rivi on kunnossa.

- Yleensä laskuvirhe vähentää pisteitä siitä rivistä, johon se kohdistuu, mutta myöhempien rivien pisteet voi saada, jos tekee laskut/päättelyt oikein omille luvuille. Poikkeukset on merkitty tällä värillä. Nämä pisteet saa vain, jos tämä askel ja myös edeltävät askeleet on oikein suoritettu. (Tällöin ratkaisussa on ekvivalenttia muotoilua vaille ohjeeseen merkitty luku/lauseke/tms.) Tekstin punainen väri ei vaikuta pyöristysten pisteyttämiseen. Jos esimerkiksi vastausrivillä lukee 37, niin myös 37,5 ja 40 kelpaavat.
- Rivien riippuvuus toisistaan
  - Yleensä pisteytys on kirjoitettu ratkaisun matemaattisen etenemisen mukaisesti ja (täysiä) pisteitä annetaan vain perustelluista askeleista. Jos rivit ovat ilmeisen riippumattomia toisistaan (esim. laskettu eri funktioiden derivaatat), niin pisteet annetaan suoritusjärjestyksestä riippumatta ilman eri merkintää.
  - Jos vastaus on kirjoitettu ennen perusteluja, tarkoittaa se, että pelkästä (oikeasta) vastauksesta saa jo pisteitä.
  - Merkintä $\bigtriangledown$ tarkoittaa, että rivin pisteet voi antaa edellä olevista riveistä riippumattomasti; seuraavat rivit edellyttävät tätä riviä normaaliin tapaan.
  - Merkintä $\bullet$ tarkoittaa, että rivin pisteet voi antaa edellä olevista riveistä riippumattomasti; seuraavat rivit eivät edellytä tätä riviä.
  - Merkintä $\Rightarrow$ korostaa, että kyseiset pisteet saa vain, jos aiemmat perustelut ovat kunnossa.
- Terminologiaa
  - ”Vastaus riittää” tarkoittaa, että oikeasta vastauksesta annetaan pisteet myös ilman perusteluja. Jos vastaus on väärin, voi pisteitä saada normaalien periaatteiden mukaisesti perustelujen perusteella.
  - ”Alkupisteitä” tarkoittaa, että tästä voi antaa rivin pisteet, jos ei muualta saa pistettä. Tätä pistettä ei siis voi yhdistää muihin pisteisiin.
  - ”maxN” tarkoittaa, että tämän tyyppisestä ratkaisusta annetaan N pistettä, mikäli siinä ei ole muita virheitä.
  - ”Vastaus vain likiarvona” tarkoittaa, että ratkaisussa ei ilmene lainkaan vastauksen tarkkaa arvoa.

Seuraavat vähennykset ovat tehtäväkohtaiseen pisteohjeeseen toissijaisia. Yhteen tehtävään voi soveltaa useaa vähennystä, mutta ansaittuja pisteitä ei voi menettää.

- Vastaus oikein, muttei pyydetyssä muodossa (esim. tarkkuus, yksikkö) −1 p.
- Vastaus sieventämättä loppuun asti sievennystehtävässä (esim. e^1, $\ln(e)$ tai 4^0) −2 p.
- Vastaus sieventämättä muussa tehtävässä (esim. e^1, $\ln(e)$ tai 4^0) −1 p.
- Ilmeiset näppäilyvirheet esityksessä (esim. $x = 2$, $y04$), tai näppäilyvirheet, jotka korjataan heti seuraavalla rivillä −0 p.
- Vastauksessa kopiointivirhe −1 p.
- Välipyöristyksessä ei yhtä enemmän merkitseviä numeroita kuin vastauksessa −1 p.

Seuraavat vähennykset ovat tehtäväkohtaiseen pisteohjeeseen toissijaisia. Yhteen tehtävään voi soveltaa useaa vähennystä, mutta kutakin korkeintaan kerran.

- Matemaattisesti puutteellinen merkintä (esim. puuttuvat sulut, mutta laskettu oikein; =-merkin ketjutus, m^2 ilman m). Huom.! Tilanteesta riippuen epästandardi merkintä voidaan hyväksyä selitettynä. −1 p.
- Ratkaisusta puuttuu oleellisia selityksiä (lukija joutuu arvaamaan, mitä ratkaisussa esiintyvät luvut tarkoittavat) TAI perustelut ja johtopäätökset on esitetty täysin irrallisina (lukija joutuu yhdistelemään eri puolilla ratkaisua olevia lauseita) −1 p.
- Ratkaisussa merkittävästi ylimääräistä tekstiä/laskuja (lukija joutuu päättelemään, miten annetuista tiedoista muodostuu ratkaisu) −1 p.

Tehtäväkohtaiset ohjeet

A-osa

1.

ei voi olla aritmeettinen eikä geometrinen	2
voi olla geometrinen	2
voi olla aritmeettinen	2
9	2
3	2
Funktion kuvaajan tangentin kulmakertoimen. TAI virheellisesta mutta oikean suuntaisesta vastauksesta ”funktion maksimikohdan”.	2 1

2.

Kaavaan sijoitus $\sqrt{5^2+12^2}$	1
$\sqrt{169}$	(1)
13	1
$\pm$, $\bar{\imath}$ tai $\bar{\jmath}$ käytetty väärin tai pistetulon merkintä puuttuu	-1

Vastakkaissuuntaisuuden ja miinusmerkin suhde ymmärretty $[-\bar{u}]$.	1
$\triangledown$ Yksikkövektori oikein TAI kerroin $\frac{5}{13}$ TAI $\frac{25}{13}\bar{\imath}+\frac{60}{13}\bar{\jmath}$.	1
$-\frac{25}{13}\bar{\imath}-\frac{60}{13}\bar{\jmath}$ TAI $-\frac{5}{13}\bar{u}$.	1
$-\frac{5}{13}(5\bar{\imath}+12\bar{\jmath})$ ei riitä sievennetyksi muodoksi vastauksessa.	
TAI	
Yhtälöryhmän muodostaminen:	
pituusehto $[x^2+y^2=5^2]$,	1
$\triangledown$ yhdensuuntaisuusehto $[x=5t,\ y=12t]$.	1
Yhtälöryhmä ratkaistu oikein $[-\frac{25}{13}\bar{\imath}-\frac{60}{13}\bar{\jmath}]$.	1
Pelkkä oikea vastaus	1
Alkupiste: vektori, joka on todettu vastakkaissuuntaiseksi TAI 5 yksikköä pitkäksi.	
Desimaaliapproksimaatio (jos tehty selväksi jakso, niin ei vähennystä)	max2
Annettu sekä tarkka arvo että likiarvo	max3

Suoran L kulmakerroin $[\frac{4-(-8)}{4-(-1)}=\frac{12}{5}]$ (1 p.) ja vertailu ja $\bar{u}$:n kulmakertoimen $[\frac{12}{5}]$ kanssa (1 p.) TAI suoran suuntavektori $[5\bar{\imath}+12\bar{\jmath}$ TAI $-5\bar{\imath}-12\bar{\jmath}]$	2
$\Rightarrow$ perusteltu johtopäätös yhdensuuntaisuudesta.	1
Ristitulo-ehto laskettu pistetulona.	+0
(Virhe siirtynyt edellisistä kohdista)	max3

Yhtälöön $y-y_0=k(x-x_0)$ TAI $y=kx+b$ sijoitettu kulmakerroin ja suoran piste $[y-4=\frac{12}{5}(x-4)]$	1+1
eli $y=\frac{12}{5}x-\frac{28}{5}$.	1
Sekamurtoluvut/desimaaliluvut	max3
Kulmakerroin laskettu tässä kohdassa väärin	-1
(Virhe siirtynyt edellisistä kohdista)	max3

Luvun $\sqrt{169}$ käyttäminen luvun 13 tilalla ratkaisuissa, yleisvähennys	-1

3.

Lavennetaan oikean puolen lausekkeet: $\frac{1}{2+x}+\frac{1}{2-x}=\frac{2-x}{(2+x)(2-x)}+\frac{2+x}{(2-x)(2+x)}$	
(ensimmäinen piste, jos toinen termi oikein tai strategiasta)	2
$(=\frac{2-x+2+x}{4-x^2})=\frac{4}{4-x^2}$.	2
TAI	
Käytetään $4-x^2=(2+x)(2-x)$.	1
(Strategiapiste) Kerrotaan puolittain lausekkeella $4-x^2$ TAI lausekkeilla $2+x$ ja $2-x$.	1
Yhtälön muokkauksella päädytään identtisesti toteen yhtälöön [$4=4$].	2
Virhetulkinta: ratkaistu nimittäjien nollakohdat.	+0

$\int_{-1}^{1}\frac{1}{2+x}\,dx=\Big/_{-1}^{1}\ln\|2+x\|$	2
$=\ln 3-\ln 1=\ln 3$.	2
Itseisarvojen sijaan $\ln(2+x)$	−0
Ylimääräinen integrointivakio vastauksessa	−1
Väärä integraalifunktio, joka ei ole kopiointi- tai kirjoitusvirheestä johtuva, esim. $\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2}+\frac{1}{x}$ tai $\int_{-1}^{1}\frac{1}{2+x}\,dx=\Big/_{-1}^{1}-\frac{1}{(2+x)^2}$.	max0

Käytetään kohtaa 3.1 lausekkeen $\frac{1}{4-x^2}$ avaamiseen	(1)
eli $\frac{1}{4-x^2}=\frac{1}{4}(\frac{1}{2+x}+\frac{1}{2-x})$.	1
$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{2+x}=\ln 3$ (kohta 3.2)	
$\triangledown$ $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{2-x}=\ln 3$ (symmetria tai lasku)	1
Laskettu integraalien arvot yhteen [$\frac{2}{4}\ln 3$, $\frac{1}{4}\ln 9$ TAI $\frac{1}{2}\ln 3$ (tms.)].	1
Todettu, että sisäfunktion derivaatta $-2x$ puuttuu.	+0
Kerroin $\frac{1}{4}$ puuttuu.	−1

Vastaus likiarvona ilman lopullista sievennystä [esim. $\ln 3-\ln 1\approx 1{,}0986$].	−1

4.

Käytetään derivaattaa TAI derivoinnin idea.	1
Yhdistetyn funktion tai tulon/osamäärän derivointisääntöä käytöstä viitteitä.	1
Yhdistetyn funktion ja tulon/osamäärän derivointisääntöä käyttö pääosin oikein.	1
$\triangledown$ Tangentin derivointikaavaa käytetty oikein.	1
$f'(x)$ on $\frac{2+\tan^2 x-\tan^4 x}{(2+\tan^2 x)^2}$ TAI $\frac{1+\tan^2 x}{(2+\tan^2 x)^2}(2-\tan^2 x)$ TAI $\frac{2-\tan^2 x}{\cos^2 x(2+\tan^2 x)^2}$.	1
Relevantti nollakohta on $\tan x = \sqrt{2}$.	1
Perustelut, miksi muut nollakohdat hylätty.	1
• Kuvan perusteella funktio saavuttaa suurimman arvonsa derivaatan nollakohdassa TAI merkkikaavio TAI tarkistettu derivaatan nollakohta sekä $f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = 0$.	1
Suurin arvo on $(\frac{\sqrt{2}}{2+2} =)$ $\frac{\sqrt{2}}{4}$.	1
TAI	
• Muuttujanvaihto $t = \tan\alpha$.	1
Lauseke $g(t) = \frac{t}{2+t^2}$.	2
Derivaatta $g'(t) = \frac{1}{2+t^2} - \frac{2t^2}{(2+t^2)^2}$.	2
Nollakohta $t = \sqrt{2}$.	1
• Tangentti on kasvava välillä $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$ ja se saa arvot $[0,\infty)$.	1
• Kuvan perusteella funktio saavuttaa suurimman arvonsa derivaatan nollakohdassa TAI merkkikaavio TAI tarkistettu derivaatan nollakohta sekä $f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = 0$.	1
Suurin arvo on $(g(\sqrt{2}) =)$ $\frac{\sqrt{2}}{4}$.	1
Vain likiarvot	-1

Yhtälö $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.	(1)
$\alpha = 2\tan^{-1}\frac{\sqrt{2}}{4}$ TAI $\frac{\alpha}{2} \approx 19{,}47^\circ\,(+n180^\circ)$ TAI $\frac{\alpha}{2} \approx 0{,}3398\,(+\pi n)$	1
39° (tämä tarkkuus)	1
Toisella rivillä radiaanilaskuista saa pisteet, jos käy ilmi, että kyse on radiaaneista (esim. myöhempi muunnos asteiksi)	
Tyyppivirhe $M = 1$ johtaa arvoon $2\tan^{-1} 1 = 90^\circ$	0+1+0

B1-osa

5.

Olkoot suorakulmion sivut x ja y, joista y on rantaviivaa myöten oleva sivu TAI piirretty tilanteesta kuva (kolmio ja suorakaide hahmoteltu).	1
Komplementaariset janat, pituudet $120 - x$ TAI $150 - y$	1
Yhdenmuotoisuuden nojalla päätelty, että	1
$\frac{y}{150} = \frac{120-x}{120}$ TAI $\frac{150-y}{150} = \frac{x}{120}$ (tms)	2
$\Rightarrow x = \frac{150-y}{150} \cdot 120$.	1
Pinta-ala on $A(y) = \frac{150-y}{150} \cdot 120 \cdot y = \frac{120(150-y)y}{150}$.	2
Derivaatta on $A'(y) = \frac{120}{150}(150 - 2y)$.	1
$A'(y) = 0$, kun $y = 75$, ja perustelu, että tämä on maksimi.	1
Tällöin $x = 60$.	1
• Kysytyt sivujen pituudet ovat siis 75 (m) ja 60 (m).	1
TAI	
Olkoot suorakulmion sivut x ja y, joista y on rantaviivaa myöten oleva sivu TAI piirretty tilanteesta kuva (kolmio ja suorakaide hahmoteltu).	1
Oikea kuva on oikeassa mittakaavassa.	(1)
Kuvaan merkitty kriittisten pisteiden koordinaatit (tms.), esim. suorakulmainen kolmio, jonka kärkinä ovat origo, $(120, 0)$ ja $(0, 150)$.	1
Hypotenuusasuoran yhtälö on $y = -\frac{150}{120}(x - 120) = -\frac{5}{4}x + 150$.	2
Kärjen koordinaatit ovat siis $\left(x, -\frac{5}{4}x + 150\right)$.	1
Rivit 6–10 kuten yllä.	6
Maksimoinnin voi tehdä ohjelmistolla, kun lauseke on löytynyt.	
Maksimointipisteet (4 p.) saa (myös ohjelmistolla), jos $y \mapsto A(y)$ on alaspäin aukeava paraabeli, joka antaa mielekkään ratkaisun.	
Likiarvot ok, liiallinen pyöristys yleisohjeen mukaisesti.	
Graafinen ratkaisu kokeilemalla TAI taulukointi.	+0

6.

Olkoon alkuperäisen astian tilavuus V ja astian pinnan ala A.	1
Uuden astian tilavuus on $\frac{1}{4}V$.	1
Skaalauskerroin $k = \left(\frac{1}{4}\right)^{1/3}$ TAI $k = 4^{1/3}$.	(2)
Pinta-alan skaalauskerroin k^2 [uusi pinta-ala $\left(\frac{1}{4}\right)^{2/3} A$].	2
Pinta-alan ja tilavuuden suhde uudessa astiassa on siis $\frac{(\frac{1}{4})^{2/3}A}{\frac{1}{4}V} = 4^{1/3}\frac{A}{V}$.	2
Suhde $\frac{4^{1/3}\frac{A}{V} - \frac{A}{V}}{\frac{A}{V}}$ (3 p.) TAI $\frac{4^{1/3}\frac{A}{V}}{\frac{A}{V}}$ (2 p.) ja $\frac{4^{1/3}\frac{A}{V}}{\frac{A}{V}} - 1$ (1 p.).	3
$(4^{1/3} - 1 \approx)$ 58,740105 %.	1
Kaikki tarkkuudet käyvät; likiarvo välivaiheessa riittävällä tarkkuudella käy.	
Kaava $V = Ah$ (tms) ilman yleistä astiaa.	+0
Väärinpäin tehty suhde.	+0
Asetettu makuaineiden määräksi $\frac{A}{V}$ ilman kerrointa, viidennestä pisterivistä	−1
”Oletetaan, että $V = 1$” ilman perusteluja.	−2
”Oletetaan, että astia on kuutio” (tms) ilman perusteluja (0+0+1+0+1+3+1).	max6

7.	$\frac{3}{6}$, $\frac{1}{2}$, 0,5 TAI 50 % + perustelu ($\frac{3}{6}$ käy myös perusteluksi).	1+1
	Liisa pääsee Kairoon aikaisintaan kolmannella, jos hän saa ensimmäisellä ja toisella heitolla 1, todennäköisyys: $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$;	1
	ensimmäisellä 1 ja toisella 2: $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$;	
	ensimmäisellä 2 ja toisella 1: $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$ TAI kaksi tapaa saada 1 ja 2.	1
	Omien termien (vähintään 2 kpl) yhteenlaskeminen.	1
	Saatu $\frac{1}{12}$ $(= 0{,}083\ldots)$.	1
	Voi tarkastella neljän tai kolmen heiton sarjoja: oikein tarkasteltu tapaus (esim. lauseke $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{6}$ tapauksesta kolme ykköstä ja yksi 1–6) 1 p., kaikki loput tapaukset oikein 2 p., omien termien (vähintään 2 kpl) yhteenlaskeminen 1 p.	
	TAI (komplementin avulla)	
	Merkitään $p(j)$ päästään j heitolla.	
	Lasketaan komplementin avulla $1 - p(1) - p(2)$.	
	Liisa voittaa toisella heitolla, jos: ensimmäinen heitto on kolme ja toinen mikä tahansa, toinen heitto on 2 ja toinen on vähintään 2 tai ensimmäinen heitto on 1 ja toinen on vähintään 3.	2
	Suotuisia alkeistapauksia on siis 15, eli $p(2) = \frac{15}{36}$ (Huom! Piste myös 7.3-kohdassa).	1
	Kysytty todennäköisyys on $1 - p(1) - p(2) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{15}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ $(= 0{,}083\ldots)$.	1
	TAI (alkeistapausten avulla)	
	Liisa tarvitsee enemmän kuin kaksi heittoa täsmälleen, kun kahdella ensimmäisellä heitolla tulee $1, 1$ tai $1, 2$ tai $2, 1$.	2
	$\triangledown$ Kahdesti noppaa voi heittää $6 \cdot 6 = 36$ eri tavalla.	(1)
	Todennäköisyys on siis $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ $(= 0{,}083\ldots)$.	1
	Todennäköisyys tapahtumalle ”tasan kaksi heittoa” $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$. (Mahdollisesti laskettu jo kohdassa 7.2.).	1
	Todennäköisyys tapahtumalle ”tasan neljä heittoa” $\frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$.	1
	Kolmen heiton todennäköisyys on siis $\frac{3}{36} - \frac{1}{216} = \frac{17}{216}$.	2
	$\triangledown$ Odotusarvo on siis $\frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{15}{36} + 3 \cdot \frac{17}{216} + 4 \cdot \frac{1}{216}$	1
	$= \frac{343}{216}$ TAI $\approx 1{,}587\,962\,962$.	1
	Desimaalivastauksissa käyvät kaikki tarkkuudet, joissa vähintään kaksi merkitsevää numeroa.	
	Pelkät laskut ilman selitystä, 2/1+0+0+1/0+1+0+1+1.	max7
	Tarkasteltu tilanetta, että pitää päästä tasaluvulla.	+0

8.

1000 lukuparin arpominen oikeilla väleillä JA komento tai tarkka selitys	2+1
ehdon testaus JA komento tai tarkka selitys.	1+1
lukumäärän laskeminen.	1
Esimerkki taulukkolaskentaratkaisusta. Eri arvontakerroilla saadaan eri luvut. Oheinen on siis vain yksi esimerkki mielekkäistä luvuista, jotka taulukointi voi antaa.	
Esimerkkikoodi:	

```
import random
n=1
k=0
while n<1001:
    x=random.uniform(0,2)
    y=random.uniform(0,4)
    if x*x<=y:
        k=k+1
    n=n+1
print(k)
```

Pseudokoodiratkaisu	max6
Ratkaisuissa on käytetty toisinaan kokonaislukujen arpomista. Arpomalla kokonaisluvut isolta väliltä ja skaalaamalla voidaan rakentaa täysien pisteiden ratkaisu. Toisaalta on myös arvottu desimaalilukuja, mutta asetukset valittu niin, että vain kokonaislukuosa näkyy.	
Taulukossa näkyy vain kokonaislukuja, mutta ratkaisusta ilmenee, että on käytetty desimaalilukuja.	max6
Taulukossa näkyy vain kokonaislukuja välillä 0–4, eikä mistään ilmene, että on käytetty desimaalilukuja.	max4
Arvottu kokonaislukuja + skaalattu.	max6

Keskiarvo 665.	1
Perusteluna komento tai lauseke.	1
▽ Ala on on siis noin $\frac{665}{1000}$ koko suorakulmiosta,	(2)
eli $\frac{665}{1000} \cdot 2 \cdot 4 \approx 5{,}3$.	2
Laskettu pinta-ala käyttämättä asianmukaisesti Hillen ohjelman tulosteita.	0

9.

• Todettu, että funktio on jatkuva muualla kuin kohdassa $x = 0$.	1
Oikeanpuoleinen raja-arvo $\lim_{x\to 0+}(ax+1)^2 + a(1-a) = 1 + a - a^2$.	1
Vasemmanpuoleinen raja-arvo $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$ TAI "vasemman osafunktion" jatkuvuus.	1
Muodostettu yhtälö, jossa raja-arvot ovat yhtä suuria $[1 + a - a^2 = 1]$.	1
• Yhtälössä huomioitu myös funktion arvo $f(0) = 1$ TAI "vasemman osafunktion" jatkuvuus.	1
Vastaus $a = 0$ tai $a = 1$.	1
Rivit 2–6 voi ratkaista solve-komennolla	max6
Ratkaistu ilman raja-arvoa vetoamatta "osafunktioiden" jatkuvuuteen $(1 + 0 + 0 + 1 + 1 + 1)$	max4
Ohjelmistolla liukusäädin-kokeilu-ratkaisu $0 + 1 + 0 + 0 + 0 + 1$.	max2

• Todettu, että funktio on derivoituva muualla kuin kohdassa $x = 0$.	1
Erotusosamäärä vasemmalta on $E_1 = \lim\limits_{h\to 0^-} \frac{(h^3+1)-1}{h}$.	1
Erotusosamäärä oikealta on $E_2 = \lim\limits_{h\to 0^+} \frac{(ah+1)^2+a(1-a)-1}{h}$.	1
Yhtälö $E_1 = E_2$.	1
$\triangledown$ Derivoituvuudesta seuraa jatkuvuus, joten kohdan 9.1 nojalla $a = 0$ ja $a = 1$ ovat ainoat mahdolliset arvot.	(1)
Toteutuu vain, kun $a = 0$.	1
Laskettu $E_2 = \lim\limits_{h\to 0^+} \frac{(ah+1)^2+a(1-a)-(1+a(1-a))}{h}$ vetoamatta jatkuvuuteen.	-1
Suljettu graafisesti pois $a = 1$ ja tutkittu tapaus $a = 0$ kuten yllä.	max5
Graafinen ratkaisu $(1 + 0 + 0 + 0 + 1 + 0)$	max2
TAI	
• Todettu, että funktio on derivoituva muualla kuin kohdassa $x = 0$.	1
Derivaatan raja-arvo oikealta: $\lim\limits_{x\to 0^+} 2(ax+1)a = 2a$.	1
Derivaatan raja-arvo vasemmalta $\lim\limits_{x\to 0^-} 3x^2 = 0$.	1
Asetettu yhtälöksi ja saatu $a = 0$ (tästä ei vielä lisäpisteitä).	
Kohdan 9.1 nojalla funktio on jatkuva, kun $a = 0$, joten tämä ehto toteutuu vain, kun $a = 0$.	2
Tämä päättely on pätevä, sillä derivaatan raja-arvo on olemassa TAI koska osafunktiot ovat jatkuvasti derivoituvia.	1
Derivaatta laskettu origossa raja-arvon sijaan, ilman perusteluja.	-1

Ensimmäiset pisteet eivät tule vielä toteamalla, että riittää tarkastella kohtaa $x = 0$, vaan pitää todeta jatkuvuus/derivoituvuus muualla.	

B2-osa

10.

(a) todistus, (b) määritelmä, (c) lause	3
Tätä kohtaa ei tarvitse perustella eikä perusteluja oteta huomioon.	
Kohdasta ei pisteitä, jos siihen laittaa useamman vastauksen ["(b) on sekä määritelmä että lause"].	

• Oikea oletus, eli kolmion sivujen pituudet a, b ja c toteuttavat ehdon $a^2+b^2=c^2$.	2
• Oikea johtopäätös, kolmio on suorakulmainen.	2
Esim. "Jos kolmio toteuttaa Pythagoraan lauseen, niin se on suorakulmainen".	0+2
Väiteessä implikaation sijaan ekvivalenssi.	-1
Kutsuttu väitettä Pythagoraan lauseeksi, ja kirjoitettu auki oikea sisältö.	4
Epämääräinen, mutta oikein ["Käänteinen Pythagoraan lause"].	3
Vastattu vain "Pythagoraan lause".	0
Muu kuin aineisto (a) valittu todistukseksi.	0

Olkoon luvun kymmenjärjestelmäesitys $a_m a_{m-1} \ldots a_1 a_0$.	(1)
Tämä tarkoittaa sitä, että $n = a_0 + 10a_1 + 100a_2 + \cdots + 10^m a_m$ ja	1
luvun n numeroiden summa on $a_m + a_{m-1} + \cdots + a_1 + a_0$.	1
Tällöin $n \equiv a_m + a_{m-1} + \cdots + a_1 + a_0 \pmod 3$,	1
koska $10^k \equiv 1 \pmod 3$.	1
Alkupiste: $10 \equiv 1 \pmod 3$, esim. kokeilujen yhteydessä TAI ei-triviaali esimerkki, jossa lause toimii (esim. $3 \mid 72$ ja $3 \mid (7+2)$).	1
Käsitelty vain kolminumeroiset luvut.	max3
Osoitettu (b) käyttäen logaritmikaavaa [esim. $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$].	max2

11.

Otetaan molemmista luvuista logaritmi.	1
Logaritmin laskusäännöillä $100^{101} \lg 99$ ja $100^{99} \lg 101$.	1
$100^{101} \lg 99 \approx 1{,}996 \cdot 10^{202}$ ja $100^{99} \lg 101 \approx 2{,}004 \cdot 10^{198}$ TAI supistettu 100^{99}	1
$\Rightarrow$ luku $99^{100^{101}}$ on suurempi.	1
TAI	
Otetaan molemmista luvuista 100^{99}. juuri.	2
Vertailtaviksi jäävät luvut 99^{100^2} ja 101.	1
Näistä ensimmäinen on suurempi.	1
TAI	
Mielekäs strategia (juuri, logaritmi, vastaava).	1
Osattu toteuttaa strategia.	2
Oikea johtopäätös.	1
Tyyppivirhe $99^{100^{101}} = 99^{100 \cdot 101}$ tms. (1+1+0+0) Huom. Pisteitä ei saa, jos nämä virheelliset lausekkeet on vain syötetty laskimeen ilman toimivaa strategiaa.	max2
Vastaus ilman perusteluja TAI laskinperustelu ja luvut eivät ole selvästi tarpeeksi pieniä, jotta laskimeen voi luottaa.	0
Alkupiste: Kokeilu pienillä luvuilla (esim. 2^{3^4} ja 4^{3^2}) ja oikea johtopäätös TAI eksponenteille pätee $100^{101} \gg 100^{99}$.	1

• Käytetty rekursiokaavaa oikein	(1)
$1 = a_7 + a_3$ (annettu kaava kun $n = 3$).	1
$\triangledown$ Koska $a_1 = 1 = a_2$, pätee $a_3 = 0$.	1
Siispä $a_7 = 1$.	1
$\triangledown$ Käytetään rekursiokaavaa ”alaspäin”:	
$1 = a_{2021} + a_{1010} = a_{2021} + a_{505}$.	2
Jatketaan samalla tavalla:	
$1 = a_{505} + a_{252} = a_{505} + a_{126} = a_{505} + a_{63}$,	
$1 = a_{63} + a_{31}$,	
$1 = a_{31} + a_{15}$,	
$1 = a_{15} + a_7$.	1
Koska $a_7 = 1$, ratkaistaan takaisin sijoittamalla $[a_{15} = 0,\ a_{31} = 1,\ a_{63} = 0,\ a_{505} = 1$ ja$]$ $a_{2021} = 0$.	1
Tehtävän voi myös ratkaista siirtymällä rekursiokaavaan $a_{2n+1} + a_{2n} = 1$.	max8
Toiseksi viimeistä riviä varten ei tarvitse näyttää kaikkia yhtälöitä, kunhan ratkaisun etenemislogiikka on ymmärrettävä.	
Rekursiokaavat väärin kopioitu ja saatu vastaava ratkaisu.	max6
Voi tehdä taulukoimalla, jos on tarkasti selittänyt, miten rekursion on toteuttanut.	

12.	Pallojen keskipisteet muodostavat tasasivuisen kolmion, jonka sivu on 6.	2
	Kolmion kärjen etäisyys on $\frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$ siitä kolmion pisteestä, joka on yhtä kaukana kaikista kolmion kärjistä.	2
	• Laskettu jokin kolmiulotteinen etäisyys.	(1)
	Pienen pallon keskipisteen etäisyys ison puolipallon keskipisteestä on $\sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{16} = 4$.	2
	Ison puolipallon säde on edellä mainitun etäisyyden ja pienen pallon säteen summa $[3 + 4 = 7]$.	2
	Perustelu: Säde, joka kulkee ison puolipallon ja yhden pienen pallon sivuamispisteestä ison puolipallon keskipisteeseen yhtyy pienen pallon säteeseen.	3
	Käytetty likiarvoja (-1 p. ensimmäisestä likiarvosta ja -1 p. vastauksesta).	max10
	Graafisella ohjelmistolla voidaan ratkaista eri kohtien laskuja, noudattaen yllä olevaa ratkaisumallia.	max12
	Jos poiketaan ratkaisumallista kokeilun puolelle ja vastaus on välillä $[6{,}9; 7{,}1]$, vastauksesta 1 p. (sisältää vastauksen likiarvovähennyksen).	
	Alkupiste: kuva, jossa kolme samankokoista palloa sivuaa toisiaan TAI tasoprojektio samasta tilanteesta. Muilta osin kuva voi olla myös virheellinen.	1
	Pallot omituisissa konfiguraatioissa.	+0

13.	$P(x) = (x-2)(x-3)$ ja $Q(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)$ TAI $P(x) = x^2 - 5x + 6$ ja $Q(x) = x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6}$.	(1)
	$\Rightarrow p_2 = 1,\ p_1 = -5$ ja $p_0 = 6$ ja $q_2 = 1,\ q_1 = -\frac{5}{6}$ ja $q_0 = \frac{1}{6}$.	1
	$P(x) = (x-2)(x-3) \Rightarrow p_2 = 1,\ p_1 = -5$ ja $p_0 = 6$	1
	$P(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2) = x^2 - \alpha_1 x - \alpha_2 x + \alpha_1\alpha_2$, eli	1
	• $p_2 = 1,\ p_1 = -(\alpha_1 + \alpha_2)$ ja $p_0 = \alpha_1\alpha_2$.	1
	$Q(x) = (x - \frac{1}{\alpha_1})(x - \frac{1}{\alpha_2}) = x^2 - \frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1\alpha_2}x + \frac{1}{\alpha_1\alpha_2}$, eli	1
	• $q_2 = 1,\ q_1 = -\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1\alpha_2}$ $[= -\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2}]$ ja $q_0 = \frac{1}{\alpha_1\alpha_2}$.	1
	Toistettu merkkivirhe $p_1 = \alpha_1 + \alpha_2$ ja $q_1 = \frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1\alpha_2}$, muuten oikein.	3
	Alkupiste: $P(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$ ja $Q(x) = (x - \frac{1}{\alpha_1})(x - \frac{1}{\alpha_2})$.	1
	Tarkastellaan polynomia P muuttujan arvolla $\frac{1}{x}$:	1
	$P\left(\frac{1}{x}\right) = (\frac{1}{x} - \alpha_1)(\frac{1}{x} - \alpha_2)\cdots(\frac{1}{x} - \alpha_n)$	1
	$= \frac{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}{x^n}(\frac{1}{\alpha_1} - x)(\frac{1}{\alpha_2} - x)\cdots(\frac{1}{\alpha_n} - x)$	1
	$= (-1)^n\frac{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}{x^n}(x - \frac{1}{\alpha_1})(x - \frac{1}{\alpha_2})\cdots(x - \frac{1}{\alpha_n})$,	1
	eli $(-1)^n\frac{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}{x^n}Q(x) = P(\frac{1}{x})$.	
	Toisaalta $(-1)^n\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n = p_0$	1
	$\Rightarrow q_i = \frac{p_{n-i}}{p_0}$.	1
	TAI	
	Kerrottu auki polynomi P (näkyvissä vähintään p_2 asti tai p_{n-2} lähtien).	1
	Kerrottu auki polynomi Q (näkyvissä vähintään q_2 asti tai q_{n-2} lähtien).	1
	• Kirjoitettu oikein polynomien P ja Q yleiset kertoimet p_j ja q_j lukujen α_i avulla.	1
	• Löydetty yhteys $q_j = \frac{p_{n-j}}{p_0}$ TAI $q_j = (-1)^n\frac{p_{n-j}}{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}$.	1
	Perusteltu edellä mainittu yhteys ainakin yhdessä tapauksessa $1 < j < n-1$	1
	Perusteltu $q_j = \frac{p_{n-j}}{p_0}$ kaikilla j.	1
	Alkupiste: Perusteltu $q_1 = \frac{p_{n-1}}{p_0}$ TAI $q_{n-1} = \frac{p_1}{p_0}$ kerroin.	1
	Indeksit systemaattisesti samalla tavalla väärin.	-1