MATEMATIKPROV, LÅNG LÄROKURS 18.3.2020
BESKRIVNING AV GODA SVAR

Den här filen är inte nödvändigtvis fullkomligt tillgänglig för till exempel användare av skärmläsningsprogram.

Slutgiltiga beskrivningar av goda svar 12.5.2020

Grunderna enligt vilka bedömningen gjorts framkommer i de slutgiltiga beskrivningarna av goda svar. Uppgiften om hur bedömningsgrunderna tillämpats på examinandens provprestation utgörs av de poäng som examinanden fått för sin provprestation, de slutgiltiga beskrivningarna av goda svar och de föreskrifter gällande bedömningen som nämnden gett i sina föreskrifter och anvisningar. De slutgiltiga beskrivningarna av goda svar innehåller och beskriver inte nödvändigtvis alla godkända svarsalternativ eller alla godkända detaljer i ett godkänt svar. Eventuella bedömningsmarkeringar i provprestationerna anses vara jämställbara med anteckningar och sålunda ger de, eller avsaknaden av markeringar, inte direkta uppgifter om hur bedömningsgrunderna tillämpats på provprestationen.

Av en god prestation framgår det hur examinanden har kommit fram till svaret. I lösningen måste det ingå nödvändiga uträkningar eller andra tillräckliga motiveringar och ett slutresultat. I bedömningen fästs uppmärksamhet vid helheten och vid de tre stegen start, mellansteg och slutresultat. Räknefel som inte väsentligt ändrar uppgiftens natur ger ingen betydande sänkning av antalet poäng. Räknefel och fel i den matematiska modellen som ändrar uppgiftens natur kan däremot sänka antalet poäng avsevärt.

I provet är räknaren ett hjälpmedel, och dess roll bedöms separat för varje uppgift. Om symbolräknare använts i en uppgift ska det framgå av prestationen. I lösningar av uppgifter som kräver analys räcker det inte enbart med ett svar som erhållits med hjälp av räknaren utan övriga motiveringar. Däremot räcker ett svar som examinanden fått med räknaren i allmänhet i rutinberäkningar. Detsamma gäller rutinmässiga delar av mera omfattande uppgifter. Exempel på sådana är omskrivning av uttryck, ekvationslösning samt derivering och integrering av funktioner.

Hur bedömningsanvisningarna ska tolkas

- Strukturen på en anvisning
  - Uppdelade poäng i en rad är åtskiljda med /-tecknet. I oklara fall har specificerats från vilken del som man får vilka poäng.
  - Det finns ingen specificering om det på raden finns lika många uträkningar som poäng - i så fall ges en poäng per uträkning.
  - Om en rad består av en uträkning och en motivering i ord i anknytning till den, så härrör hälften av poängen från uträkningen (avrundande uppåt) och resten från motiveringarna.
  - Om det på en rad endast finns en uträkning eller en formel och flera poäng, så får man delpoäng för ett tillräckligt bra försök (till exempel beräkning av derivatan delvis rätt).
  - En uträkning eller motivering i parentes på en rad är tilläggsinformation som inte behövs för att ge poäng.
  - Poäng i parentes ges automatiskt om följande rad är i skick.
- I allmänhet ger ett räknefel poängavdrag från den rad som felet gäller men man kan få de följande radernas poäng om man korrekt utför uträkningarna/slutledningarna med egna tal. Undantag är betecknade med denna färg. Då ska lösningen bestå av korrekt tal eller uttryck eller motsvarande så när som på den ekvivalenta utformningen.
- Radernas beroende av varandra
  - I allmänhet är poänganvisningen skriven enligt lösningens matematiska progression och (fulla) poäng ges bara för motiverade steg. Om raderna är uppenbart oberoende av varandra (till exempel olika funktioners derivator har beräknats) ges poängen oberoende av prestationsordning utan särskild notering.
  - Om svaret är skrivet före motiveringarna betyder det att man för blotta (korrekta) svaret redan får poäng.
  - Beteckningen $\bigtriangledown$ i början av en rad betyder att radens poäng kan ges oberoende av de tidigare raderna; de följande raderna förutsätter denna rad på normalt sätt.
  - Beteckningen $\odot$ i början av en rad betyder att radens poäng kan ges oberoende av de tidigare raderna; de följande raderna förutsätter inte denna rad.
  - Beteckingen $\Rightarrow$ poängterar att man får de ifrågavarande poängen endast om de tidigare motiveringarna är i skick.
- Terminologi
  - ”Startpoäng” betyder att härifrån kan radens poäng ges om examinanden inte får poäng från annat håll. Denna poäng kan alltså inte kombineras med andra poäng.
  - ”maxN” betyder att för en lösning av denna typ ges N poäng om det inte finns andra fel i lösningen.
  - ”Svaret endast som närmevärde” betyder att svarets exakta värde inte alls framgår av lösningen.

Följande avdrag är av sekundär betydelse för den uppgiftsspecifika poänganvisningen. På ett ställe kan man tillämpa flera avdrag, men man kan inte förlora intjänade poäng.

- Svaret korrekt, men inte i den efterfrågade formen (t.ex. noggrannhet, enhet) -1 p.
- Svaret är inte förenklat till slut i en förenklingsuppgift (t.ex. e^1, $\ln(e)$ eller 4^0) -2 p.

- Svaret är oförenklat i en annan uppgift (t.ex. e^1, $\ln(e)$ eller 4^0) -1 p.
- Uppenbara inmatningsfel i framställningen (t.ex. $x = 2$, $y04$), eller inmatningsfel som korrigeras direkt på följande rad -0 p.
- Kopieringsfel i svaret -1 p.
- Inga flera gällande siffror i en mellanavrundning än i svaret -1 p.

Följande avdrag är av sekundär betydelse för den uppgiftsspecifika poänganvisningen. På ett ställe kan man tillämpa flera avdrag, men vardera avdrag högst en gång

- Matematiskt bristfällig beteckning (t.ex. parenteser som fattas men korrekt beräknat; =-tecknet använt "i kedja", m^2 utan m). Obs! Beroende på situationen så kan en ostandardiserad beteckning godkännas som förklarad. -1 p.
- I lösningen saknas väsentliga förklaringar (läsaren måste gissa vad talen i lösningen betyder) ELLER motiveringarna och slutledningarna är framställda helt lösryckta (läsaren måste kombinera uttryck från olika delar av lösningen) -1 p.
- Betydande överflödig text eller överflödiga beräkningar i en lösning (läsaren måste dra slutsatser om hur lösningen utformas utifrån den givna informationen) -1 p.

Uppgiftsspecifika anvisningar

Del A

1.

$x = \frac{1}{2}$	2
$2/4$	1
Teckenfel	-1

$x < -5$	3
I svaret måste talet 5 eller -5 finnas, annars inga poäng	
Talet 5 har fel tecken	-1
Olikhetstecknet är felvänt (t.ex. $x > -5$)	-1
I olikheten ingår även likhet (t.ex. $x \leqslant -5$)	-1
Svaret i formen < -5 utan variabeln x	-1
Svar -5 ELLER $x = -5$	1
I svaret ingår överflödiga intervall förutom det korrekta	-2

$x = 0$ eller $x = -1$	3
Lösningen $x = 0$ saknas	-1
Lösningen $x = -1$ saknas	-2
Lösningen $x = -1$ i formen $\sqrt[3]{-1}$	-1
Överflödiga lösningar	-1

$2 < x < 3$	4
Talet 2 ingår i svaret som en ändpunkt till något intervall och intervallet är angivet i rätt riktning	$1 + 1$
Talet 3 ingår i svaret som en ändpunkt till något intervall och intervallet är angivet i rätt riktning	$1 + 1$
Enbart talen 2 och 3 ger inga poäng (exempelvis. $x = 2$ och $x = 3$)	$+0$
Svaret är ett slutet intervall $2 \leqslant x \leqslant 3$	3
Svar $-3 < x < 2$	2
I svaret finns överflödiga intervall förutom det korrekta	-2

För långt svar (över 30 tecken)	-1
Rätt svar i fel ruta	$+0$

2.

$\overline{a}+\overline{b}=4\overline{i}+7\overline{j}$	2
Koefficienten 4 är fel	-1
Koefficienten 7 är fel	-1
Felaktiga beteckningar (men i och j är rätt)	-1
$\overline{b}-2\overline{a}=-17\overline{i}+\overline{j}$	2
Den ena koefficienten är korrekt och den andra fel	-1
$-17\overline{i}+\overline{i}$ ELLER $-17\overline{j}+\overline{j}$ ($\overline{i}$ eller $\overline{j}$ har blivit utbytt till den andra bokstaven)	-1
$-17\overline{j}+\overline{i}$ ($\overline{i}$ och $\overline{j}$ har bytt plats)	-1
Felaktiga beteckningar (men i och j är rätt)	-1
$\lvert\overline{b}\rvert^2=34$	2
Som svar ≈ 34	-1
Som svar $5{,}83\approx\lvert\overline{b}\rvert$	-1
Som svar $53=\lvert\overline{a}\rvert^2$	-1
$\lvert\overline{a}+\overline{b}\rvert\approx 8{,}06$	2
Fel noggrannhet 8,1 ELLER 8,062	-1
Andra felaktiga noggrannheter eller avrundningar	0
Svar $-8{,}06$ ELLER $\pm 8{,}06$	-1
$\overline{a}\cdot\overline{b}=-11$	2
Fel tecken	-1
Svaret innehåller vektorer	0
$\alpha\approx 105^\circ$	2
Felaktig men förnuftig noggrannhet och korrekt avrundat	-1
Svar 2 ELLER 1,8 ELLER 1,83 (räknaren har varit i radianläge)	$+1$
Svar 75 (skalära produktens minus glömts bort)	$+1$
För långt svar (över 30 tecken)	-1
Korrekt svar i fel ruta	$+0$

3.

$\int_0^2 \sin(\frac{\pi}{2}x)\,dx = -\frac{2}{\pi}\Big/_0^2 \cos(\frac{\pi}{2}x)$ ("inre funktionen" $\pm\cos(\frac{\pi}{2}x)$ + slut)	$1+1$
Substitutionen beräknat till slut (med egen funktion).	1
Svaret endast som närmevärde ($\frac{4}{\pi} = 1{,}2732\ldots$)	-1

⊙ Svar $t = \frac{3}{4}$.	2
Arean beräknas genom integrering av sin-funktionen i intervallet $[t, t+1/2]$.	1
$f(t) = \int_t^{t+1/2} \sin(\frac{\pi}{2}x)dx = \frac{2}{\pi}\cos(\frac{\pi t}{2}) - \frac{2}{\pi}\cos(\frac{\pi t}{2} + \frac{\pi}{4})$.	(2)
För att maximera detta beräknas derivatan: $f'(t) = \sin(\frac{\pi}{2}(t+\frac{1}{2})) - \sin(\frac{\pi}{2}t)$.	1
$f'(t) = 0$, om $\frac{\pi}{2}(t+\frac{1}{2})$ och $\frac{\pi}{2}t$ är varandras supplementvinklar (i intervallet $[0,\pi]$)	(1)
dvs. $\pi - \frac{\pi}{2}(t+\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{2}t$.	1
Med stöd av teckenschema ELLER randvärden ELLER en skiss är derivatans nollställe ett maximiställe.	1
(Den största arean fås alltså då $t = \frac{3}{4}$.)	
Koefficienten $\frac{2}{\pi}$ saknas i integralen	-1
Koefficienten $\frac{\pi}{2}$ saknas i derivatan	-1
Teckenfel i integralen och/eller derivatan	-1
Övriga fel i integralen men den är korrekt deriverad	$+1$
Startpoäng: någon funktion har deriverats (möjligen fel)	max 1
ELLER	
⊙ Svar $t = \frac{3}{4}$.	2
En skiss av grafen, som har ett maximiställe, och av lodräta skärande linjer ELLER motsvarande förklaring i ord.	1
Arean är störst då remsan är (symmetriskt) vald kring toppen.	2
Största värdet till funktionen $\sin z$ uppnås i punkten $z = \frac{\pi}{2}$,	(1)
dvs. det största värdet till funktionen $\sin(\frac{\pi}{2}x)$ uppnås i punkten $x = 1$.	2
Intervallets längd är $\frac{1}{2}$, dvs. areans största värde uppnås då $t = 1 - \frac{1}{2}/2$.	1

4.	Punktens avstånd till origo är $\sqrt{x^2+y^2}$ ELLER uttrycket x^2+y^2 ELLER beräknat avståndet från någon punkt till origo.	1
	$\bigtriangledown$ (Randen har blivit granskad) $x^4+y^2=1$.	(2)
	Då är $y^2=1-x^4$, dvs. avståndets kvadrat x^2+1-x^4 maximeras	1
	$\odot$ i intervallet $-1 \leqslant x \leqslant 1$.	1
	Uttryckets derivata är $2x-4x^3$ ELLER en idé om derivering.	1
	Derivatans nollställen $x=0$ / $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.	1+1
	Teckenväxling eller granskning av fall (om begränsningen $-1 \leqslant x \leqslant 1$ saknas, max1 härifrån)	2
	$\Rightarrow$ största avståndet är $\sqrt{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2+1-(\frac{1}{\sqrt{2}})^4}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.	2
	Också intervallet $-1 < x < 1$ är giltigt	
	ELLER	
	Avståndet är störst då normalen till kurvan $x^4+y^2=1$ går genom origo.	1
	Funktionens $f(x)=\sqrt{1-x^4}$	1
	derivata är $f'(x)=-\frac{2x^3}{\sqrt{1-x^4}}$, som är tangentens riktningskoefficient.	2
	Punkten $x=0$ är en lösning, vilket ger avståndet 1.	1
	I maximipunkten är normalens riktningskoefficient $\frac{\sqrt{1-x^4}}{x}$,	2
	dvs. man får olikheten $-\frac{2x^3}{\sqrt{1-x^4}}\cdot\frac{\sqrt{1-x^4}}{x}=-1$.	2
	Detta ger att $2x^2=1$, dvs. $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.	1
	$\Rightarrow$ största avståndet är $\sqrt{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2+1-(\frac{1}{\sqrt{2}})^4}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.	2

Från rad 4 framåt kan beräkning med y göras	
Svaret endast som närmevärde.	-2
Svar $\approx$ 1,12 ELLER $\approx$ 1,1 genom prövning.	2
OBS: i lösningen kan man också använda variabelbyte ($u=x^2$ och $v=y^2$).	

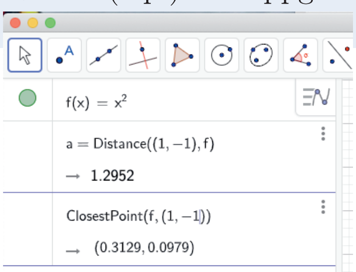
Del B1

5.	Examinanden har konstaterat att diametern är uppdelad i 4 lika stora delar	1
	Examinanden försöker beräkna halvcirkelns area	1
	Det orangefärgade/gröna områdets area är $\pi/2 + (8\pi - 9\pi/2)$	2
	$= 4\pi$.	1
	Det gula/blå områdets area är $(2\pi - \pi/2) + (9\pi/2 - 2\pi)$	2
	$= 4\pi$.	1
	⊙ Det blå/gula områdets area har beräknats ELLER symmetri	2
	⊙ Det gröna/orangefärgade områdets area beräknats ELLER symmetri	2
	Beräknat med närmevärden (hela uppgiften)	-2
	4π framgår inte, men examinanden har korrekt konstaterat att areorna är lika stora, exempelvis med subtraktion	max 12
	Beräkning med en allmän radie r	max 12
	Beräkning med fel radie	max 10
	Beräkning av hela cirkeln area och dividerat den med fyra.	$+0$
	ELLER	
	⊙ Den blå och den gula arean är lika stora	2
	⊙ Den gröna och den orangefärgade arean är lika stora	2
	Det blå områdets övre rand skär bort en bit, vars area är $(\frac{3}{4})^2 = \frac{9}{16}$ av arean på den övre stora halvcirkeln.	3
	Å andra sidan tillkommer en bit med arean $(\frac{1}{4})^2 = \frac{1}{16}$ från den nedre gröna halvcirkeln.	3
	Den gröna delens area är alltså $\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$ av halvcirkelns area.	2
	Den blåa delens area är också hälften av halvcirkelns area.	1
	$\Rightarrow$ Alla delar har samma area.	1
	Startpoäng: grön och blå $=$ gul och orange.	1

6.

Riktningkoefficienten för den tangent till parabeln som går genom punkten (x_0, x_0^2) är $2x_0$	1
och ekvationen är alltså $y - x_0^2 = 2x_0(x - x_0)$, dvs. $y = 2x_0x - x_0^2$.	1
Vi sätter in punktens koordinater och får $-1 = 2x_0 - x_0^2$	1
$\Rightarrow (1-\sqrt{2}, 3-2\sqrt{2})$ och $(1+\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2})$ ELLER $(-0{,}41; 0{,}17)$ och $(2{,}41; 5{,}83)$.	1
ELLER	
Vi bildar ett ekvationssystem: $y + 1 = k(x-1)$, $y = x^2$, $k = 2x$	1+1+1
ur vilket vi löser $x = 1 \pm \sqrt{2}$	
$\Rightarrow (1-\sqrt{2}, 3-2\sqrt{2})$ och $(1+\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2})$ ELLER $(-0{,}41; 0{,}17)$ och $(2{,}41; 5{,}83)$.	1
Examinanden har direkt startat från ekvationen $x^2 + 1 = 2x(x-1)$	max 2
ELLER (Geogebra eller motsvarande lösning)	
ett kommando: tangenterna till kurvan som går genom punkten A	1
två kommandon: tangenternas och kurvans skärningspunkter	1+1
förklaringar på vad som gjorts.	1

Uttrycket för avståndet är $\sqrt{(x-1)^2 + (x^2+1)^2}$	2
(vi minimerar alltså $(x-1)^2 + (x^2+1)^2 = x^4 + 3x^2 - 2x + 2$)	
Beräknad derivata $\frac{2x^3+3x-1}{\sqrt{x^4+3x^2-2x+2}}$ (ELLER $4x^3 + 6x - 2$)	2
teckenväxling ELLER annan motivering	1
viktigt nollställe: $x = \sqrt[3]{\frac{1}{4}(1+\sqrt{3})} - 1\Big/\sqrt[3]{2(1+\sqrt{3})} \approx 0{,}31291$	1
$\Rightarrow (0{,}31; 0{,}10)$ är den närmaste punkten ELLER exakt värde	1
$\Rightarrow$ Det kortaste avståndet är cirka 1,30 ELLER exakt värde.	1
ELLER (Geogebra eller motsvarande lösning)	
kommando: vi tar en punkt B från kurvan och ritar en tangent till den	1
kommando: vi ritar en linje mellan punkterna A och B	1
kommando: vinkeln mellan tangenten och linjen	1
punkten B flyttas tills man ungefärligen får en rät vinkel	1
kommando: avstånd	
$\Rightarrow$ svar: punkten $(0{,}31; 0{,}10)$ och avståndet 1,30	1+1
Motivering: kortaste avståndet då tangenten och linjen är vinkelräta mot varandra.	2
ELLER (Geogebra eller motsvarande lösning)	
Ritad lösning	2
Förklaring på vad som ritats eller gjorts	2
$\Rightarrow$ svar: punkten $(0{,}31; 0{,}10)$ och avståndet 1,30	1+1
Matematisk motivering.	2
Av närmevärdeslösningarna krävs två decimalers noggrannhet, annars -1 för hela uppgiften	
Man kan även lösa uppgiften direkt med kommando (se figur). Poäng: kommando (3 p.) + svar (1 p.) i deluppgift 6.1 och kommando (4 p.) + svar (2 p.) i deluppgift 6.2.	



7.	⊙ Antalet av alla kombinationer är 6^5 ELLER sannolikheten för att få tre sexor är $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$ och sannolikheten för att få två femmor är $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$.	1
	⊙ Vi kan få tre sexor och två femmor på $\binom{5}{3} = 10$ olika sätt.	1
	Multiplikation/division av de egna talen ($\frac{10}{6^5} \approx 0{,}0013$).	1
	Examinanden kan också få de två första poängen från deluppgift 7.2 om motsvarande beräkningar är gjorda där men 7.1 är tom.	
	⊙ För trippeln finns det 6 olika alternativ ELLER sannolikheten för att få tre kast som är lika $\frac{6}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$	1
	⊙ För paret finns det 5 olika alternativ ELLER sannolikheten för att få två kast (annat ögontal) som är lika $\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$	1
	⊙ $\binom{5}{3} \cdot 30 \cdot \frac{1}{6^5}$ (koefficient, 30, antal: 1 p. vardera)	3
	$=\frac{50}{6^4}$ ELLER 0,039.	1
	⊙ Fyrtalet kan vara placerat på $\binom{5}{4} = 5$ olika sätt.	1
	⊙ Antalet alternativ för fyrtalet är 6 och för det ensamma ögontalet 5 ELLER sannolikheten för att få fyra kast som är lika $\frac{6}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$ och sannolikheten för att få ett annat ögontal är $\frac{5}{6}$.	1
	⊙ Multiplikation/division av de egna talen, division med 6^5 ($\frac{5 \cdot 30}{6^5} = \frac{5^2}{6^4} \approx 0{,}019$)	1
	Svaret kan ges i alla former (bråkform, %, närmevärde) Alla noggrannheter godkänns Enbart uträkningar utan några förklaringar.	2+5+2
8.	En beskrivning av divisionsalgoritmen i ord (förklaringsdel):	
	förklaring: från polynomet $p(x)$ subtraheras $x^4 q(x)$	2
	förklaring: resultatet är ett polynom av femte graden, vars ledande term är $3x^5$	2
	förklaring: $3x^3 q(x)$ subtraheras, varvid ett polynom av fjärde graden återstår.	1+1
	Algoritm utförd till slut (prestationsdel):	
	$p(x) = (x^4 + 3x^3 + 4x^2)q(x) + 11x^3 + 3x^2 - 3x + 4$	2
	$p(x) = (x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 11x + 36)q(x) + 94x - 32$ man får 1 p. vardera av koefficienterna 11, 36, 94, -32.	4
	Examinanden endast förklarat allmänna divisionsalgoritmen för polynom, av förklaringsdelen	1
	Om koefficienterna i prestationsdelen är felaktiga pga. ett räknefel i början, kan man ändå få en del av poängen om principen är rätt	
	Algoritmen till slut med räknare (enbart resultat)	+0
	Algoritmen till slut med divisionstrappa, av prestationsdelen	max 6

9.		
	Exempel på en funktion f eller ett uttryck	2
	Motivering för att det existerar en invers funktion	(2)
	Uttrycket för den inversa funktionen	(3)
	Man kan komma ända hit med fel funktion. De sista poängen kan man bara få med en fungerande funktion.	
	Den inversa funktionens derivata har beräknats	3
	Examinanden har beräknat att derivatan av den inversa funktionen i punkten $x = 2$ är $\frac{1}{2}$.	2
	ELLER	
	Värdet av funktionen h i punkten $x = 2$ är $\frac{1}{2}$	2
	Integrering $H = \int h$	3
	Motivering för att det existerar en invers funktion till H	(2)
	Uttrycket för den inversa funktionen H^{-1}	3
	Som svar funktionen H^{-1} eller dess uttryck	2
	Integrationskonstant C i svaret	-1
	Om funktionen inte är en bijektion ”i sin naturliga definitionsmängd” (exempelvis x^2), måste funktionen begränsas till en lämplig mängd, annars	-1
	Invers funktion $\pm\sqrt{x}$ (dålig beteckning).	-1
	Exempelfunktioner $x \mapsto 2x$, $x \mapsto e^x$, $x \mapsto \sqrt{8x}$ och $x \mapsto \frac{1}{2}x^2$ då $x \geqslant 0$.	

Del B2

10.		
	Bra början, exempelvis uppdelning av talet i bitar på 1, 2 och 3 siffror ELLER observationen att man borde ta reda på antalet siffror.	(1)
	Antalet siffror är förnuftigt beräknat.	1
	k är ett mindre än antalet siffror i talet.	1
	Exempel på hur man beräknar antalet siffor: $9+2\cdot9\cdot10+3\cdot9\cdot100 = 9+180+2700 = 2889$ (korrekt); $9+2\cdot89+3\cdot899 = 2884$ (fel, men förnuftigt); $9+90+900 = 999$ (fel, inte förnuftigt) Av den här delen kan man få 3 p. trots att det skulle finnas indexeringsfel, om bara logiken är förnuftig och förklarad.	
	Bra början, exempelvis insättning av sitt eget k i uttrycket $\ln(1{,}23 \cdot 10^k)$ eller $\ln(1{,}23 \cdot 10^k) = \ln(1{,}23) + \ln(10^k)$.	(1)
	$\ln(1{,}23 \cdot 10^k)$ beräknat för sitt eget k, $k \geqslant 1000$	2
	⊙ Avhuggning av heltalsdelen	2
	Alla tal korrekta och svaret 6 650	1
	Beräknat $\ln(1{,}24 \cdot 10^{2888})$ eller $\ln(1{,}2345 \cdot 10^{2888})$, eller på något annat sätt visat att avrundningen av a inte inverkar på den tidigare beräknade heltalsdelen.	3
	Den sista radens poäng erhålls om man beräknar $\ln(1{,}2345 \cdot 10^k)$ eller ännu noggrannare direkt.	
	$\ln(1{,}23 \cdot 10^{2888}) = \infty$	0
	Avrundning i stället för avhuggning/≈-tecknet	-1
	Enbart svar	0

11.

(Startsteg) $a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} > \sqrt{2} = a_1$.	1
(Induktionsantagande) $a_n > a_{n-1}$ för något $n \geqslant 2$.	1
(Induktionspåstående) Examinanden försöker visa att $a_{n+1} > a_n$ följer av induktionsantagandet.	1
Induktionspåståendet är motiverat och bevisets hela logiska struktur (även implikationernas riktning) är i skick.	1
Induktionssteget ”visat” med insättningen $a_n < \sqrt{2+a_n}$.	+0
I stället för $>$ kan $\geqslant$ användas (konsekvent).	
(Startsteg) $a_1 = \sqrt{2} < 2$.	1
(Induktionsantagande) $a_n < 2$ för något $n \geqslant 1$.	1
(Induktionspåstående) Examinanden försöker visa att $a_{n+1} < 2$ följer av induktionsantagandet.	1
Induktionspåståendet är motiverat och bevisets hela logiska struktur (även implikationernas riktning) är i skick.	1
$\odot$ Rätt svar 2 (den här poängen kräver inte motiveringar)	1
$\odot$ Sambandet $\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}} = \lim_{n\to\infty} a_n$	1
(En växande och uppåt begränsad) talföljd (a_n) konvergerar mot något gränsvärde $a > 0$ och även $a_{n+1} \to a$, då $n \to \infty$.	(1)
(Med stöd av kvadratrotsfunktionens kontinuitet) får vi ekvationen $a = \sqrt{2+a}$, vars enda positiva lösning $a = 2$ är det efterfrågade gränsvärdet.	1
Den första poängen kan man få t.ex. genom att göra en tabell.	
Orden ”grundsteg”, ”induktionsantagande”, ”induktionspåstående” ger inte i sig poäng, och de behövs inte heller om bevisets struktur i övrigt klarläggs.	
Obs! Det är möjligt att konstruera ett giltigt induktionsbevis genom att utgå från påståendet och forma detta i riktning mot antagandet om implikationerna är korrekta.	
Stegen nedskriva under varandra utan att det framgår i vilken rikting implikationerna går (dålig beteckning).	-1
Startpoäng: Tabell eller $a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$	max 1

12.

Examinanden har gett exempel på två heltal i intervallet 2–100.	1
⊙ Det geometriska medelvärdet av två olika stora heltalsvärden är ett heltal,	1
som har visats genom uträkning (med räknare).	1

Antalet utfall är 100^2	(1)
Examinanden har gjort en tabell, där kvadratroten av alla 10000 produkter ingår.	1
Redogörelse för med vilket kommando som heltalen har separerats från de övriga talen (till exempel genom att skära bort decimaldelen, som ligger i intervallet $[0,1[$).	2
Examinanden har förklarat hur hen har beräknat antalet tal för vilka det geometriska medelvärdet är ett heltal (exempelvis använt 1 för heltalsvärdena, och 0 för övriga).	2
Resultatet är 310.	2
Sannolikheten är alltså $310/10^4 = 0{,}031$.	1
Mindre tabell (exempelvis 10×10)	max 2
Endast en tabell över några fungerande par	0
ELLER (brute force -lösning)	
Antalet utfall 100^2	(1)
Examinanden har gjort en tabell, där kvadratroten av alla 10000 produkter ingår.	1
Av lösningen framgår att heltalen har räknats för hand.	
Resultatet är 310 ELLER 309 / 311 (4 p.) ELLER något annat heltal i intervallet $[300, 320]$ (2 p.).	6
Sannolikheten är alltså $310/10^4 = 0{,}031$.	1
ELLER (analytisk lösning)	
Antalet utfall 100^2	1
Kvadraterna i intervallet 1–100: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100	1
Kvadratroten är ett heltal om båda talen är kvadrater, av vilket vi får $10 \cdot 10 = 100$ utfall.	1
Kvadratroten är ett heltal om talen är lika, av vilket vi får $100 \cdot 1 = 100$ utfall.	1
I de föregående utfallen är 10 samma.	(1)
Genom att beakta de övriga fallen är utfallen totalt 310.	3
Sannolikheten är alltså $310/10^4 = 0{,}031$.	1
ELLER (simuleringslösning)	
Examinanden har lottat ut heltalspar där talen ligger i intervallet 1–100 samt beräknat deras geometriska medelvärden.	2
⊙ Antalet talpar är minst 10	1
⊙ Antalet talpar är minst 100	1
⊙ Antalet talpar är minst 250	1
⊙ Utlottningsmetoden är förklarad.	1
Det framtagna resultatet har dividerats med det totala antalet utlottade par.	2
Resultatet ligger i intervallet $[0{,}016; 0{,}046]$ ELLER talparen är minst 500 till antalet.	1
https://www.ylioppilastutkinto.fi/images/sivuston_tiedostot/Hyv_vast_piirt/SV_2020_V/m12a.ods	
https://www.ylioppilastutkinto.fi/images/sivuston_tiedostot/Hyv_vast_piirt/SV_2020_V/m12b.ods	

13.	Först beräknas $g'(x) = -n \sin x$.	2
	Det ska alltså visas att $-n \sin x_0 < -n + 1$	1
	dvs. $\sin x_0 > 1 - \frac{1}{n}$.	1
	$\triangledown$ Om $\sin \frac{x_0}{n} = n \cos x_0$, så är $\sin x_0 = \sqrt{1 - \cos^2 x_0} = \sqrt{1 - \frac{1}{n^2} \sin^2 \frac{x_0}{n}}$	1
	$> \sqrt{1 - (\frac{1}{n})^2}$.	2
	Det räcker alltså att visa att $\sqrt{1 - (\frac{1}{n})^2} \geqslant 1 - \frac{1}{n}$,	1
	dvs. $1 - (\frac{1}{n})^2 \geqslant (1 - \frac{1}{n})^2$	2
	som gäller eftersom $\frac{2}{n} \geqslant \frac{2}{n^2}$ då $n \geqslant 1$.	2
	Startpoäng: derivatan i grader ($g'(x_0) = -n \frac{\pi}{180} \sin x_0$) ELLER fallet $n = 1$	
	ELLER grafisk framställning	max 1