YLIOPPILASTUTKINTOLAUTAKUNTA
STUDENTEXAMENSNÄMNDEN

Matematiikka, pitkä oppimäärä 22.9.2020
Lopulliset hyvän vastauksen piirteet 12.11.2020

Lopullisista hyvän vastauksen piirteistä ilmenevät perusteet, joiden mukaan koesuorituksen lopullinen arvostelu on suoritettu. Tieto siitä, miten arvosteluperusteita on sovellettu kokelaan koesuoritukseen, muodostuu kokelaan koesuorituksestaan saamista pisteistä, lopullisista hyvän vastauksen piirteistä ja lautakunnan määräyksissä ja ohjeissa annetuista arvostelua koskevista määräyksistä. Lopulliset hyvän vastauksen piirteet eivät välttämättä sisällä ja kuvaa tehtävien kaikkia hyväksyttyjä vastausvaihtoehtoja tai hyväksytyn vastauksen kaikkia hyväksyttyjä yksityiskohtia. Koesuorituksessa mahdollisesti olevat arvostelumerkinnät katsotaan muistiinpanoluonteisiksi, eivätkä ne tai niiden puuttuminen näin ollen suoraan kerro arvosteluperusteiden soveltamisesta koesuoritukseen.

Hyvästä suorituksesta näkyy, miten vastaukseen on päädytty. Ratkaisussa on oltava tarvittavat laskut tai muut riittävät perustelut sekä lopputulos. Arvioinnissa kiinnitetään huomiota kokonaisuuteen, ja ratkaisu pyritään arvioimaan kolmiosaisesti: alku, välivaiheet ja lopputulos. Laskuvirheet, jotka eivät olennaisesti muuta tehtävän luonnetta, eivät alenna pistemäärää merkittävästi. Sen sijaan tehtävän luonnetta muuttavat lasku- ja mallinnusvirheet saattavat alentaa pistemäärää huomattavasti.

Laskin on kokeen apuväline, jonka rooli arvioidaan tehtäväkohtaisesti. Jos ratkaisussa on käytetty symbolista laskintaa, sen on käytävä ilmi suorituksesta. Analysointia vaativien tehtävien ratkaisemisessa pelkkä laskimella saatu vastaus ei riitä ilman muita perusteluja. Sen sijaan laskimesta saatu tulos yleensä riittää rutiinitehtävissä ja laajempien tehtävien rutiiniosissa. Tällaisia ovat esimerkiksi lausekkeiden muokkaaminen, yhtälöiden ratkaiseminen sekä funktioiden derivointi ja integrointi.

Miten pisteytysohjeita luetaan

- Ohjeen rakenne
  - Ohjeessa riviksi kutsutaan kokonaisuutta, joka päättyy oikeassa sarakkeessa olevaan pistemäärään.
  - Rivin useat pisteet on erotettu /-merkillä. Epäselvissä tapauksissa on suluissa eritelty, mistä osasta saa mitäkin pisteitä.
  - Erittelyä ei ole, jos rivillä on saman verran laskuja kuin pisteitä, tällöin yksi piste laskua kohden.
  - Jos rivillä on yksi lasku ja siihen liittyvä sanallinen perustelu, niin puolet pisteistä (pyöristettynä ylös) saa laskusta ja loput perusteluista.
  - Jos rivillä on vain yksi lasku tai kaava ja useampi piste, saa osapisteet riittävän hyvästä yrittämisestä (esim. derivaatan laskeminen osittain oikein).
  - Rivillä suluissa oleva lasku tai perustelu on lisätietoa, eikä sitä vaadita pisteiden saamiseen.
  - Suluissa olevat pisteet saa automaattisesti, jos seuraava rivi on kunnossa.

- Yleensä laskuvirhe vähentää pisteitä siitä rivistä, johon se kohdistuu mutta myöhempien rivien pisteet voi saada jos tekee laskut/päättelyt oikein omille luvuille. Poikkeukset on merkitty tällä värillä. Nämä pisteet saa vain, jos tämä askel ja myös edeltävät askeleet on oikein suoritettu. (Tällöin ratkaisussa on ekvivalenttia muotoilua vaille ohjeeseen merkitty luku/lauseke/tms.)
- Rivien riippuvuus toisistaan
  - Yleensä pisteytys on kirjoitettu ratkaisun matemaattisen etenemisen mukaisesti ja (täysiä) pisteitä annetaan vain perustelluista askeleista. Jos rivit ovat ilmeisen riippumattomia toisistaan (esim. laskettu eri funktioiden derivaatat), niin pisteet annetaan suoritusjärjestyksestä riippumatta ilman eri merkintää.
  - Jos vastaus on kirjoitettu ennen perusteluja, tarkoittaa se, että pelkästä (oikeasta) vastauksesta saa jo pisteitä.
  - Merkintä $\triangledown$ tarkoittaa, että rivin pisteet voi antaa edellä olevista riveistä riippumattomasti; seuraavat rivit edellyttävät tätä riviä normaaliin tapaan.
  - Merkintä $\bullet$ tarkoittaa, että rivin pisteet voi antaa edellä olevista riveistä riippumattomasti; seuraavat rivit eivät edellytä tätä riviä.
  - Merkintä $\Rightarrow$ korostaa, että kyseiset pisteet saa vain, jos aiemmat perustelut ovat kunnossa.
- Terminologiaa
  - ”Vastaus riittää” tarkoittaa, että oikeasta vastauksesta annetaan pisteet myös ilman perusteluja. Jos vastaus on väärin, voi pisteitä saada normaalien periaatteiden mukaisesti perustelujen perusteella.
  - ”Alkupisteitä” tarkoittaa, että tästä voi antaa rivin pisteet jos ei muualta saa pistettä. Tätä pistettä ei siis voi yhdistää muihin pisteisiin.
  - ”maxN” tarkoittaa, että tämän tyyppisestä ratkaisusta annetaan N pistettä, mikäli siinä ei ole muita virheitä.
  - ”Vastaus vain likiarvona” tarkoittaa, että ratkaisussa ei ilmene lainkaan vastauksen tarkkaa arvoa.

Seuraavat vähennykset ovat tehtäväkohtaiseen pisteohjeeseen toissijaisia. Yhteen kohtaan voi soveltaa useaa vähennystä, mutta ansaittuja pisteitä ei voi menettää.

- Vastaus oikein, muttei pyydetyssä muodossa (esim. tarkkuus, yksikkö) −1 p.
- Vastaus sieventämättä loppuun asti sievennystehtävässä (esim. e^1, $\ln(e)$ tai 4^0) −2 p.
- Vastaus sieventämättä muussa tehtävässä (esim. e^1, $\ln(e)$ tai 4^0) −1 p.
- Ilmeiset näppäilyvirheet esityksessä (esim. $x = 2$, $y04$), tai näppäilyvirheet, jotka korjataan heti seuraavalla rivillä −0 p.
- Vastauksessa kopiointivirhe −1 p.
- Välipyöristyksessä ei yhtä enemmän merkitseviä numeroita kuin vastauksessa −1 p.

Seuraavat vähennykset ovat tehtäväkohtaiseen pisteohjeeseen toissijaisia. Yhteen kohtaan voi soveltaa useaa vähennystä, mutta kutakin korkeintaan kerran.

- Matemaattisesti puutteellinen merkintä (esim. puuttuvat sulut mutta laskettu oikein; =-merkin ketjutus, m^2 ilman m). Huom.! Tilanteesta riippuen epästandardi merkintä voidaan hyväksyä selitettynä. −1 p.
- Ratkaisusta puuttuu oleellisia selityksiä (lukija joutuu arvaamaan, mitä ratkaisussa esiintyvät luvut tarkoittavat) TAI perustelut ja johtopäätökset on esitetty täysin irrallisina (lukija joutuu yhdistelemään eri puolilla ratkaisua olevia lauseita) −1 p.
- Ratkaisussa merkittävästi ylimääräistä tekstiä/laskuja (lukija joutuu päättelemään, miten annetuista tiedoista muodostuu ratkaisu) −1 p.

Tehtäväkohtaiset ohjeet

A-osa

1.

$x = -\frac{1}{2}$	3
$a = 9$	3
Ei ratkaisuja.	3
$b = 11$	3

2.

$-8x^4$	2
Oikea vastaus, mutta sieventämättä; merkki/kerroin/eksponentti kaksi kolmesta oikein ($-c \cdot x^4; 8x^4; -8x^k$); $(2x)^4/(-2)$.	1
10, "Etäisyys on 10", "Pisteiden välinen etäisyys on 10", $d = 10$, $AB = 10$, "10 (tai -10)".	2
$100^{1/2}$, 100, 10^2	1
$3x^2 - 4x$	2
Toinen termi oikein; $3x^2 - 4x + \ldots$; oikea vastaus, mutta sieventämättä.	1
135	2
Vastaus radiaaneina; vastaus väärällä tarkkuudella; 135 ja ...; $135 + \ldots$; 45.	1
4	2
Kerroin väärin (vastaus 1 tai 2); -4; $4 + c$.	1
82	2
$122 \sin(42)/\sin(83)$; 82,2...; 62 (lasku ilman siniä); 115 (sini radiaaneissa)	1

3.

Eksponenttifunktiota käyttämällä $\frac{y}{1-y} = e^{a+bx}$, josta $y = (1-y)e^{a+bx}$, josta $y(1 + e^{a+bx}) = e^{a+bx}$ ja edelleen $y = \frac{e^{a+bx}}{1+e^{a+bx}}$.	2 (1) (1) 2
Alussa väärä ln-kaava kuten $\ln(a/b) = (\ln a)/(\ln b)$, tehtävästä 3.1 ei pisteitä Alkupiste: Käytetty alussa oikein jotakin ln- tai exp-kaavaa kuten $\ln(a/b) = \ldots$, mutta lasku ei etene TAI määrittelyehto. Väärä kanta logaritmissa (0+1+1+2). Määrittelyehtoa ei vaadita.	0 1 4
Sijoitettu oikein $y = 0{,}5$, $a = 2$ ja $b = -1$ (tulos $\ln \frac{0{,}5}{1-0{,}5} = 2 - x$). Murtoluvun sievennys ja käytetty $\ln 1 = 0$. Ratkaistu saadusta yhtälöstä ($2 - x = 0$) vastaus ($x = 2$).	1+1+1 2 1
TAI	
Ratkaistu yleinen x. Oikeat sijoitukset. Vastauksen sievennys omasta kaavasta ($x = 2$).	1 1+1+1. 2
a ja b väärinpäin (vastaus $x = \frac{1}{2}$). Kokeilemalla $x = 2$ ja tarkistus (3+1+0). Mikäli käytetty kohdassa 3.1. johdettua kaavaa ja kaava väärin: kohdassa 3.1 pieni virhe (esim. huolimattomuusvirhe tai 1. kohdasta jäänyt väärä kanta), kohdasta 3.2. kohdassa 3.1 iso virhe (esim. omat logaritmin laskusäännöt), kohdasta 3.2.	max4 max4 max6 max3

4. Laskettu derivaatta/tangentin kulmakerroin $k = 3x^2 - 10x + 2$.	2
Pisteessä (2,0) on $k = -6$.	1
Vihjeen mukainen tangentti $y - 0 = -6(x - 2)$ tai yhtäpitävä muoto (myös väärä k kelpaa) (Pisteen sijoitus 1p, kulmakertoimen sijoitus 1p).	2
Sijoitettu yleiseen muotoon $y - 0 = k(x - 2)$ termit $k = 3x^2 - 10x + 2$ ja $y = (x - 4)(x - 2)(x + 1)$.	2
Supistettu lauseke $x - 2$ ja saatu $2x^2 - 7x + 6 = 0$.	2
Uusi ratkaisu $x = 3/2$ (ja vanha $x = 2$).	1
Kulmakerroin $k = -\frac{25}{4}$	1
ja tangentin yhtälö $y - 0 = -\frac{25}{4}(x - 2)$ tai yhtäpitävä muoto.	1
TAI	
Edellisen ratkaisun rivit 1–3.	5
Sijoitettu yleiseen muotoon $y - 0 = k(x - 2)$ yhtälö $y = (x - 4)(x - 2)(x + 1)$.	1
Supistettu lauseke $x - 2$ ja saatu $x^2 - 3x - 4 = k$.	2
Diskriminantti $9 - 4(-4 - k) = 0$.	1
Kulmakerroin $k = -\frac{25}{4}$	1
ja tangentin yhtälö $y - 0 = -\frac{25}{4}(x - 2)$ tai yhtäpitävä muoto.	1
Selitys, miksi diskriminanttiehto antaa sopivan tangentin.	1
TAI	
Käyrän tangentin kulmakerroin pisteessä (x_0, y_0) on $3x_0^2 - 10x_0 + 2$,	2
joten pisteeseen (x_0,y_0) piirretyn tangentin yhtälö on $(3x_0^2 - 10x_0 + 2)(x - x_0) = y - y_0$,	1
eli $(3x_0^2 - 10x_0 + 2)(x - x_0) = y - (x_0^3 - 5x_0^2 + 2x_0 + 8)$.	1
Suoran on kuljettava pisteen (2,0) kautta, eli yhtälön $(3x_0^2 - 10x_0 + 2)(2 - x_0) = -(x_0^3 - 5x_0^2 + 2x_0 + 8) = -(x_0 - 4)(x_0 - 2)(x_0 + 1)$ on oltava tosi.	2
Yhtälö on tosi, jos $x_0 = 2$, jolloin $y_0 = 0$,	1
eli suoran yhtälö on $y = (3 \cdot 2^2 - 10 \cdot 2 + 2)(x - 2) = -6(x - 2) = -6x + 12$,	1
tai kun $(3x_0^2 - 10x_0 + 2) = (x_0 - 4)(x_0 + 1)$,	1
josta toisen asteen ratkaisukaavalla $x_0 = 2$ tai $x_0 = \frac{3}{2}$,	1
eli kulmakerroin on $3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 10 \cdot \frac{3}{2} + 2 = -\frac{25}{4}$,	1
ja tangentin yhtälö on $y - \frac{25}{8} = -\frac{25}{4}\left(x - \frac{3}{2}\right)$ eli $y = -\frac{25}{4}x + \frac{25}{2}$.	1

Jos derivaatta on väärin, menettää yhden pisteen derivoinnista ja yhden pisteen molempien suorien yhtälöistä.	max9
Puuttuu tarkistus: (2,0) toteuttaa yhtälön.	−0

B1-osa

5.

Kolmioiden yhteinen alue on viisikulmio, joka jakaantuu kahteen symmetriseen puolisuunnikkaaseen.	(1)
Puolisuunnikkaan leveys on $1/2$.	1
(Yhdenmuotoisuuden perusteella) pidemmän pystysuoran sivun pituus h toteuttaa yhtälön $h/(7/2) = 3/4$,	2
joten $h = 21/8$.	1
Vastaavasti lyhyemmän pystysuoran sivun pituus y toteuttaa yhtälön $y/3 = (21/8)/(7/2)$,	2
joten $y = 9/4$.	1
Puolisuunnikkaan ala on $\frac{1}{2}(h+y)\cdot\frac{1}{2} = 39/32$,	2
joten kysytty ala on $2 \cdot 39/32 = 39/16$.	2
Yhdenmuotoisuuden ideasta (pahasti) väärin sovellettuna riveiltä 3–6	1
TAI	
Leikkaus on viisikulmio, joka jakaantuu suorakulmioon ja kolmioon.	(1)
Kolmion/suorakulmion/viisikulmion leveys on 1.	1
Suorakulmion korkeus $9/4$ yhdenmuotoisuuden avulla.	3
Kolmion korkeus $3/8$ yhdenmuotoisuuden avulla.	3
Pinta-ala $1 \cdot 9/4 + 1/2 \cdot 1 \cdot 3/8$	1+2
$= 39/16$.	1
TAI (GeoGebra)	
Kuvio oikeilla mitoilla.	2
Viisikulmion kärkipisteet poimittu.	3
Pinta-alan likiarvo (vähintään yksi desimaali) 2,4375.	(2)
Pinta-alan tarkka arvo.	2
Selitetty, mitä on tehty tai komennot näkyvissä, kärkipisteet poimittu leikkauspistekomennolla (kerrottu sanallisesti tai näkyy komentoina), monikulmio luotu Monikulmio-komennolla (kerrottu sanallisesti tai näkyy komentoina).	3

Välivaiheet laskettu likiarvoin. Huomaa, että tarkka arvo voi olla annettu myös desimaaleina, sillä $\frac{39}{16} = 2{,}4375$. Ratkaisusta tulee kuitenkin tulla selväksi, että kyseessä on tarkka arvo.	max 10

6.	Ensimmäisen putken päätepiste $A = (9/5, 12/5, -2)$.	2
	Runkoputken yleinen piste on muotoa $(4-2t, 4+3t, -3)$.	2
	Muodostettu kohtisuoruusehto (etäisyys lyhin) pistetulon avulla TAI muodostettu pisteiden etäisyydelle t:n funktio $\left(\sqrt{13t^2 + \frac{4}{5}t + \frac{42}{5}}\right)$.	2
	Liitoskohdassa $t = -2/65$ TAI etsitty derivaatan nollakohdat ja derivaatan nollakohta oikein ($t = -2/65$).	2
	Liitoskohdan B koordinaatit ovat $(264/65, 254/65, -3)$ TAI perustelu miksi nollakohta on minimi sekä sijoitus etäisyyden lausekkeeseen.	2
	Pisteiden A ja B välinen etäisyys on $2{,}8961 \approx 2{,}9$ (metriä).	2
	TAI	
	Ensimmäisen putken päätepiste $A = (9/5, 12/5, -2)$.	2
	Määritetty runkoputken suoran yhtälö tilanteessa, jossa z vakio.	2
	Projisoitu ensimmäisen putken päätepiste tasoon $z = -3$.	1
	Laskettu projisoidun pisteen ja suoran etäisyys.	3
	Pythagoraan lauseen avulla laskettu kolmiulotteinen etäisyys.	2
	Pisteiden A ja B välinen etäisyys on $2{,}8961 \approx 2{,}9$ (metriä).	2
	TAI (Geogebra-ratkaisu)	
	Piirretty kuva/kuvia koko tilanteesta.	2
	Kuvissa mitat ovat oikein (akselit ja pisteiden koordinaatit näkyvät).	2
	Komennot/algebraikkuna näkyvissä + ratkaisu selitetty 4p + 2p TAI riittävän yksityiskohtainen selostus siitä, mitä on tehty ja mitä komentoja käytetty.	6
	Pisteiden A ja B välinen etäisyys on $2{,}8961 \approx 2{,}9$ (metriä).	2
	TAI (Geogebra-ratkaisu liukusäätimellä/raahaamalla)	
	Piirretty kuva/kuvia koko tilanteesta.	2
	Kuvissa mitat ovat oikein (akselit ja pisteiden koordinaatit näkyvät).	2
	Kuvasta/kokeilemalla vastaus, tarkkuus vähintään 2,896.	2
	Pituuden likiarvon antava prosessi selitetty (esimerkiksi piste suoralla, kulma TAI pallon säde liukusäätimellä).	2
	Kuvasta näkyy, että prosessi on toiminut (esimerkiksi kulma noin 90 astetta TAI pallo sivuaa suoraa).	(2)
	Perustelu, miksi vastaus on annetulla tarkkuudella juuri se mikä on annettu (esimerkiksi perusteltu, ettei ole alle 2,85 eikä yli 2,95 jos vastaus on 2,9).	2
	Pelkkä vastaus tai vastaus ja kuva ei anna pisteitä enemmän kuin pelkkä kuva antaisi. Melkein jokainen jotenkin järkevä runkoputken piste antaa 2,9.	+0

7.	$P(2) = 0{,}82^2 = 0{,}6724 \approx 0{,}67$.	3
	Binomijakaumatyökalu ok (pisteet työkalun käyttö 1p, poiminta 1p, pyöristys 1p, huom. jos näkyy näytöllä ”binomijakauma”, niin piste myös seuraavaan kohtaan).	
	$P(2) = p \cdot p = p^2$.	1
	Todennäköisyys yksittäisen heiton epäonnistumiselle on $1 - p$.	(1)
	$P(0) = (1-p)^2$.	1
	Todennäköisyys tapahtumalle ”1. koriin, 2. ei” on $p(1-p)$	(1)
	ja tapahtumalle ”1. ei koriin, 2. koriin” $(1-p)p$.	(1)
	Näin ollen $P(1) = 2p(1-p)$ TAI $P(1) = 2p - 2p^2$.	1
	Unohdettu, että pallo voi mennä koriin kahdessa eri järjestyksessä tapauksessa $P(1)$, pisteet 1+1+1+1+0+0.	max4
	Kaavat oikein, parametrin paikalla 0,82 (0+0+0+1+0+1).	max 2
	TAI	
	Mainittu toistokoe tai käy ilmi binomijakauma.	1
	Todennäköisyys yksittäisen heiton epäonnistumiselle on $1 - p$.	1
	$P(0)$, $P(1)$ ja $P(2)$.	1+1+1
	Binomikertoimet sievennetty.	1
	Mikäli eksponentit sieventämättä, käytetään yleisvähennystä kertaalleen	-1
	Ehdosta $P(1) = P(2)$ saadaan yhtälö $2p - 2p^2 = p^2$,	1
	jonka ratkaisut ovat $p = 0$ ja $p = 2/3$ (myös $p = 0{,}67$ ok) .	2
	Mikäli $P(1)$ tai $P(2)$ laskettu väärin edellisessä kohdassa, tehtävä 7.3 ratkaistu omilla lausekkeilla oikein, eikä tehtävän luonne muutu (2. asteen yhtälö, vähintään kahta eri astetta termejä, mahdolliset järjettömät ratkaisut suljettu pois), ei vähennyksiä.	3
	Jos $p = 0$ ratkaistu, mutta hylätty epärealistisena, ei vähennyksiä.	
	Kokeilemalla $p = \frac{2}{3} \approx 0{,}67$ (tai omasta yhtälöstä vastaava) ja tarkistus (algebrallisesti tai ohjelmistolla).	max 1

8.	$A_2 = \int_1^\infty (x^{-2} - x^{-3})\,dx$ (rajat+integroitava funktio)	2
	$= \frac{1}{2}$.	1
	Perustelu: Integraalifunktio oikein TAI dokumentointi laskimen käytöstä.	1
	Kohdassa 8.2 olevat laskut ja päättelyt luetaan hyväksi myös kohtaan 8.1 (esimerkiksi kohdassa 8.1 käytetty kaavaa $\frac{1}{n(n-1)}$, joka johdettu kohdassa 8.2).	
	$A_n = \int_1^\infty \left(x^{-n} - x^{-(n+1)}\right) dx$ (rajat 1p+funktio 2p)	3
	integraalifunktio oikein TAI raja-arvojen käsittely	1
	$= \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$	2
	$= \frac{1}{n^2-n}$.	2
	Huomaa, että toinen rivi vaaditaan, jotta kahden viimeisen rivin pisteet voi jakaa.	
	$\frac{1}{\infty} = 0$ jne.	-0
	Alkupiste: Kuva TAI leikkauspisteiden ratkaiseminen.	max 1

9.	Mainittu tai käytetty jaollisuutta JA kirjoitettu kertoma tulona. Luku $n = 1000001!$ on jaollinen luvulla 2, joten ensimmäinen luku $n+2$ on jaollinen luvulla 2, eikä siis ole alkuluku. Samoin arvoilla $3 \leqslant k \leqslant 1000001$ luku n sisältää tekijän k ja on siis jaollinen luvulla k. Tällöin $n+k$ on myös jaollinen luvulla k. Arvoilla $2 \leqslant k \leqslant 1000001$ saadaan siis peräkkäiset yhdistetyt luvut $n+k$, joita on yhteensä miljoona kappaletta.	(1+1) 1 1 1 2 1 2 1 1
	Havainto, että puolet peräkkäisistä luvuista on parillisia ja täten jaollisia kahdella, on additiivinen ainoastaan ensimmäisen rivin kanssa. Yleistä lukua k ei tarvitse näkyä ratkaisussa, vaan on riittävää, jos esim. otettu ensimmäisistä muutamasta tekijä ja viimeisestä tekijä tavalla, joka yleistyy, ja todettu, että tämä yleistyy. Testaaminen ei riitä, vaan ratkaisussa pitää näkyä yleinen idea (vaikka jollain lukuarvolla) ja todeta eksplisiittisesti, että se yleistyy. Kokeen teknisessä toteutuksessa olleen virheen vuoksi tehtävässä ei voinut käyttää kaavaeditoria. Jonkin toisen tehtävän vastauskenttään liitetty vastaus hyväksytään. Arvostelussa on otettu huomioon, että merkinnöissä voi olla teknisestä virheestä johtuvia ongelmia.	 1

B2-osa

10.	Jos funktio f on derivoituva kohdassa a, niin se on jatkuva kohdassa a.	3
	Yleisesti eivät päde seuraavat väitteet: Jos funktio f on jatkuva kohdassa a, niin se on derivoituva kohdassa a. Funktio f on jatkuva kohdassa a täsmälleen silloin, kun se on derivoituva kohdassa a. Jos funktiolla f on raja-arvo kohdassa a, niin se on jatkuva kohdassa a. Jos funktiolla f on raja-arvo kohdassa a, niin se on derivoituva kohdassa a.	1/kohta, yht. 7
	(a) Jatkuvuus $\Rightarrow$ derivoituvuus tai (c) jatkuvuus $\Leftrightarrow$ derivoituvuus: Esimerkiksi käy $f(x) = \sqrt{\lvert x\rvert}$ tai $f(x) = \lvert x\rvert$, kun $x = 0$. (d) Raja-arvo $\Rightarrow$ jatkuvuus tai (e) Raja-arvo $\Rightarrow$ derivoituvuus: Esimerkiksi käy $f(x) = x$, kun $x \neq 1$, $f(1) = -1$, tarkasteltaessa pistettä $x = 1$.	 1 1
	Esimerkkejä ei tarvitse perustella, joten virheellisistä perusteluista ei vähennystä. Esimerkeissä ei tarvitse kertoa, missä pisteessä tarkastellaan. Tulee käydä ilmi, mihin kohtaan kyseinen vastaesimerkki toimii. Jos esimerkki ei määritelty tarkasteltavassa pisteessä, ei pisteitä.	

11.

Ratkaistu yleisempi yhtälö (esim. neliöimällä saatu) TAI muutettu tangenttiyhtälöksi TAI eliminoitu sini tai kosini neliöön korottamalla TAI π:n monikerrat jäljellä.	(1)
$x = \frac{3}{4}\pi$	1
Ei vaadita perusteluja, solve käy.	
$(\sin x)^2 + \sin x \cos x + (\cos x)^2 = 1 + \sin x \cos x (= 0)$	2
$\sin 2x = -2$	(1)
$\sin x \cos x = -1$ on mahdotonta, sillä $-1 \leqslant \sin x, \cos x \leqslant 1$ ja $\lvert \sin x \rvert$ ja $\lvert \cos x \rvert$ eivät koskaan ole yhtä aikaa 1 TAI $\sin 2x$ aina vähintään -1.	1
TAI	
$\tan^2 x + \tan x + 1 (= 0)$,	2
ratkaistu toisen asteen yhtälö, todettu ettei ratkaisuja.	2
Kerrotaan yhtälö puolittain termillä $\sin x - \cos x$, jolloin saadaan $\sin^{n+1} x - \cos^{n+1} x = 0$ TAI muutetaan tangenttien summaksi ja käytetään geometrisen summan kaavaa TAI lavennetaan muotoon $\frac{\sin^{n+1} x - \cos^{n+1} x}{\sin x - \cos x}$.	1
Jos nimittäjässä $\sin x - \cos x$ tai $1 - \tan x$, niin tarkastellaan tapaus, jossa se on nolla; muutoin tämän pisteen saa automaattisesti.	1
Jos $n + 1$ on pariton, $\sin^{n+1} x = \cos^{n+1}$ muuttuu muotoon $\sin x = \cos x$ TAI parittoman tilanteen tarkastelu tangentin avulla.	1
Alkuperäisen yhtälön vasemman puolen lauseke on silloin positiivinen. Ei ratkaisuja.	1
Jos $n + 1$ on parillinen, niin $\sin^{n+1} x = \cos^{n+1}$ muuttuu muotoon $\sin x = \pm \cos x$ TAI vastaava yhtälö tangentin tilanteessa.	1
Ratkaisu saadaan vain tapauksessa $\sin x = -\cos x$ (TAI tangenttiyhtälö), eli $x = \frac{3}{4}\pi$.	1

Vastaus asteina.	-0
Ratkaistu (epätriviaali) trigonometrinen yhtälö ohjelmistolla tai kuvalla.	$+0$
Tangenttiratkaisuissa tutkimatta $\cos x = 0$ kohdissa 11.2–11.3, yhteensä	-1

12.

Laskettu derivaatta $2t$,	1
joten normaalin kulmakerroin on $-\frac{1}{2t}$.	1
• (Normaalin) yhtälö $y - t^2 = k(x - t)$.	1
Normaali leikkaa y-akselin, kun $y - t^2 = \frac{1}{2t} \cdot t$, eli $k(t) = t^2 + \frac{1}{2}$ (kun $t \neq 0$).	1
Kaarevuussäde eli luvun $K(0)$ etäisyys origosta on $\lim_{t\to 0} k(t)$	1
• $(\lim_{t\to 0} k(t) = \lim_{t\to 0} t^2 + \frac{1}{2} =)\, 0^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	1
Raja-arvo oikein omalla $k(t)$	max 2
Pisteeseen $(1, 1)$ piirretyn normaalin yhtälö on $y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1)$, eli $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.	1
Ympyrän keskipisteen on siis sijaittava tällä suoralla.	1
Pisteeseen $T(t)$ piirretty normaali leikkaa mainitun suoran, kun $-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = t^2 - \frac{x}{2t} + \frac{1}{2}$,	1
eli $\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2t}\right) x = t^2 - 1$, josta $x = \frac{t^2 - 1}{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2t}} = -2t(t + 1)$, kun $t \neq 1$,	1
ja $\lim_{t\to 1} -2t(t + 1) = -4$ sekä $y = -\frac{1}{2}(-4) + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$.	1
$\Rightarrow$ Paraabelin kaarevuussäde eli kaarevuuskeskipisteen etäisyys pisteestä (1,1) on $\sqrt{(-4 - 1)^2 + \left(\frac{7}{2} - 1\right)^2} = \sqrt{\frac{125}{4}} = \frac{5}{2}\sqrt{5}$.	1
Tyyppivirhe: Laskettu leikkauspistettä y-akselin kanssa. Ensimmäiseltä riviltä tai tuloksesta $k(1) = \frac{3}{2}$ saa yhden pisteen.	max 1

Alkupisteitä: Kuva tilanteesta ja kaarevuussäde $\frac{1}{2}$. (1+1)	max2

13.	Kuva suurinpiirtein oikein. Koordinaattiakselit paikoillaan, mittakaava merkitty ja pisteet silmämääräisellä tarkkuudella oikeilla paikoillaan.	1 1
	Kuvasta puuttuu janat.	max 1
	Algoritmi antaa oikein esimerkiksi yksikköneliön TAI suorakulmion alan. Algoritmi ei toimi nelikulmiolle, jonka muoto on "nuolenkärki" TAI Algoritmi ei toimi kunnolla sellaisten monikulmioiden kohdalla, jotka eivät ole kuperia (eli konvekseja), eli esimerkiksi sellaisen nelikulmion, jonka kärjet ovat $(1, -1)$, $(0, 0)$, $(-1, -1)$, ja $(0, 1)$. Vastaesimerkissä lyhyt selitys (sopivasti jaettu kuva tai lukuarvot tai epäkonveksisuus mainittu).	2 2 1
	Toimiva esimerkki tarkoittaa, että jokainen kärkivalinta toimii. Pelkkä kuva riittää esimerkiksi.	
	Idea epätäsmällisyydestä (eli Aalen ehdotus ei muodosta algoritmia), koska ei ole määritetty, miten kärjet valitaan/miten jako kolmioihin tehdään. Selvästi väärät selitykset -1p/kappale.	(2) 3