MATEMATIIKAN KOE, LYHYT OPPIMÄÄRÄ 18.3.2020
HYVÄN VASTAUKSEN PIIRTEITÄ

Tämä tiedosto ei välttämättä ole täysin saavutettava esimerkiksi ruudunlukuohjelman käyttäjille.

Lopulliset hyvän vastauksen piirteet 12.5.2020

Lopullisista hyvän vastauksen piirteistä ilmenevät perusteet, joiden mukaan koesuorituksen lopullinen arvostelu on suoritettu. Tieto siitä, miten arvosteluperusteita on sovellettu kokelaan koesuoritukseen, muodostuu kokelaan koesuorituksestaan saamista pisteistä, lopullisista hyvän vastauksen piirteistä ja lautakunnan määräyksissä ja ohjeissa annetuista arvostelua koskevista määräyksistä. Lopulliset hyvän vastauksen piirteet eivät välttämättä sisällä ja kuvaa tehtävien kaikkia hyväksyttyjä vastausvaihtoehtoja tai hyväksytyn vastauksen kaikkia hyväksyttyjä yksityiskohtia. Koesuorituksessa mahdollisesti olevat arvostelumerkinnät katsotaan muistiinpanoluonteisiksi, eivätkä ne tai niiden puuttuminen näin ollen suoraan kerro arvosteluperusteiden soveltamisesta koesuoritukseen.

Hyvästä suorituksesta näkyy, miten vastaukseen on päädytty. Ratkaisussa on oltava tarvittavat laskut tai muut riittävät perustelut sekä lopputulos. Arvioinnissa kiinnitetään huomiota kokonaisuuteen, ja ratkaisu pyritään arvioimaan kolmiosaisesti: alku, välivaiheet ja lopputulos. Laskuvirheet, jotka eivät olennaisesti muuta tehtävän luonnetta, eivät alenna pistemäärää merkittävästi. Sen sijaan tehtävän luonnetta muuttavat lasku- ja mallinnusvirheet saattavat alentaa pistemäärää huomattavasti.

Laskin on kokeen apuväline, jonka rooli arvioidaan tehtäväkohtaisesti. Jos ratkaisussa on käytetty symbolista laskintaa, sen on käytävä ilmi suorituksesta. Analysointia vaativien tehtävien ratkaisemisessa pelkkä laskimella saatu vastaus ei riitä ilman muita perusteluja. Sen sijaan laskimesta saatu tulos yleensä riittää rutiinitehtävissä ja laajempien tehtävien rutiiniosissa. Tällaisia ovat esimerkiksi lausekkeiden muokkaaminen, yhtälöiden ratkaiseminen sekä funktioiden derivointi ja integrointi.

Miten pisteytysohjeita luetaan

- Ohjeen rakenne
  - Rivin useat pisteet on erotettu /-merkillä. Epäselvissä tapauksissa on suluissa eritelty, mistä osasta saa mitäkin pisteitä.
  - Erittelyä ei ole, jos rivillä on saman verran laskuja kuin pisteitä, tällöin yksi piste laskua kohden.
  - Jos rivillä on yksi lasku ja siihen liittyvä sanallinen perustelu, niin puolet pisteistä (pyöristettynä ylös) saa laskusta ja loput perusteluista.
  - Jos rivillä on vain yksi lasku tai kaava ja useampi piste, saa osapisteet riittävän hyvästä yrittämisestä (esim. derivaatan laskeminen osittain oikein).
  - Rivillä suluissa oleva lasku tai perustelu on lisätietoa, eikä sitä vaadita pisteiden saamiseen.
  - Suluissa olevat pisteet saa automaattisesti, jos seuraava rivi on kunnossa.
- Yleensä laskuvirhe vähentää pisteitä siitä rivistä, johon se kohdistuu mutta myöhempien rivien pisteet voi saada jos tekee laskut/päättelyt oikein omille luvuille. Poikkeukset on merkitty tällä värillä. Tällöin ratkaisussa pitää siis olla ekvivalenttia muotoilua vaille oikea luku/lauseke/tms.
- Rivien riippuvuus toisistaan
  - Yleensä pisteytys on kirjoitettu ratkaisun matemaattisen etenemisen mukaisesti ja (täysiä) pisteitä annetaan vain perustelluista askeleista. Jos rivit ovat ilmeisen riippumattomia toisistaan (esim. laskettu eri funktioiden derivaatat), niin pisteet annetaan suoritusjärjestyksestä riippumatta ilman eri merkintää.
  - Jos vastaus on kirjoitettu ennen perusteluja, tarkoittaa se, että pelkästä (oikeasta) vastauksesta saa jo pisteitä.
  - Merkintä $\bigtriangledown$ tarkoittaa, että rivin pisteet voi antaa edellä olevista riveistä riippumattomasti; seuraavat rivit edellyttävät tätä riviä normaaliin tapaan.
  - Merkintä $\odot$ tarkoittaa, että rivin pisteet voi antaa edellä olevista riveistä riippumattomasti; seuraavat rivit eivät edellytä tätä riviä.
  - Merkintä $\Rightarrow$ korostaa, että kyseiset pisteet saa vain, jos aiemmat perustelut ovat kunnossa.
- Terminologiaa
  - ”Alkupisteitä” tarkoittaa, että tästä voi antaa rivin pisteet jos ei muualta saa pistettä. Tätä pistettä ei siis voi yhdistää muihin pisteisiin.
  - ”maxN” tarkoittaa, että tämän tyyppisestä ratkaisusta annetaan N pistettä, mikäli siinä ei ole muita virheitä.
  - ”Vastaus vain likiarvona” tarkoittaa, että ratkaisussa ei ilmene lainkaan vastauksen tarkkaa arvoa.

Seuraavat vähennykset ovat tehtäväkohtaiseen pisteohjeeseen toissijaisia. Yhteen kohtaan voi soveltaa useaa vähennystä, mutta ansaittuja pisteitä ei voi menettää.

- Vastaus oikein, muttei pyydetyssä muodossa (esim. tarkkuus, yksikkö) -1 p.
- Vastaus sieventämättä loppuun asti sievennystehtävässä (esim. e^1, $\ln(e)$ tai 4^0) -2 p.
- Vastaus sieventämättä muussa tehtävässä (esim. e^1, $\ln(e)$ tai 4^0) -1 p.
- Ilmeiset näppäilyvirheet esityksessä (esim. $x = 2$, $y04$), tai näppäilyvirheet, jotka korjataan heti seuraavalla rivillä -0 p.

- Vastauksessa kopiointivirhe −1 p.
- Välipyöristyksessä ei yhtä enemmän merkitseviä numeroita kuin vastauksessa −1 p.

Seuraavat vähennykset ovat tehtäväkohtaiseen pisteohjeeseen toissijaisia. Yhteen kohtaan voi soveltaa useaa vähennystä, mutta kutakin korkeintaan kerran.

- Matemaattisesti puutteellinen merkintä (esim. puuttuvat sulut mutta laskettu oikein; =-merkin ketjutus, m^2 ilman m). Huom.! Tilanteesta riippuen epästandardi merkintä voidaan hyväksyä selitettynä. −1 p.
- Ratkaisusta puuttuu oleellisia selityksiä (lukija joutuu arvaamaan, mitä ratkaisussa esiintyvät luvut tarkoittavat) TAI perustelut ja johtopäätökset on esitetty täysin irrallisina (lukija joutuu yhdistelemään eri puolilla ratkaisua olevia lauseita) −1 p.
- Ratkaisussa merkittävästi ylimääräistä tekstiä/laskuja (lukija joutuu päättelemään, miten annetuista tiedoista muodostuu ratkaisu) −1 p.

Tehtäväkohtaiset ohjeet

A-osa

1.

$2y+1$	2
y puuttuu kokonaan	0
$2y$ + vakio $\neq 1$	1
$\neq 2y$-termi + 1	1
$-2y-1$	1
$12x-48$	2
Termi $12x$ puuttuu tai kerroin väärin	−1
Vakiotermi -48 puuttuu tai väärin	−1
x^2-16	2
x^2+ vakio $\neq -16$	−1
x^2-termi väärin	−1
$16x^2-16x+4$ TAI $4(4x^2-4x+1)$	2
Yksi tai kaksi termiä oikein mutta vähintään yksi termi puuttuu tai väärin	−1
$-3xy^2$	2
kerroin -3 ja $x^ky^n \neq xy^2$	1
xy^2 eikä muita muuttujia, mutta kerroin väärin	1
$4x^2+6y^2+2xy$ TAI $2(2x^2+3y^2+xy)$	2
Yksi tai kaksi termiä oikein mutta vähintään yksi termi puuttuu tai väärin	−1
Vastauksena $2x^2+3y^2+xy$ (oikea vastaus jaettu kahdella)	−1
Liian pitkä vastaus (yli 30 merkkiä)	−1
Välivaiheissa oikeita lausekkeita, mutta vastaus väärin (esim. nollakohta)	+0
Oikea vastaus väärässä laatikossa	+0

2.

$\frac{13}{15}$	2
Väärä etumerkki	-1
Oikean murtolukuvastauksen lisäksi annettu likiarvo	-1
Vastaus supistamattomassa muodossa	-1

$\frac{16}{21}$	2
Väärä etumerkki	-1
Osoittaja ja nimittäjä vaihtaneet paikkaa	-1
Oikean murtolukuvastauksen lisäksi annettu likiarvo	-1
Vastaus supistamattomassa muodossa	-1

$\frac{23}{28}$	2
Väärä etumerkki	-1
Oikean vastauksen lisäksi annettu likiarvo (ei tarkka desimaalikukuarvo)	-1

$\frac{11}{16}$ TAI 0,6875	2
Väärä etumerkki	-1
Osoittaja ja nimittäjä vaihtaneet paikkaa	-1
Oikean vastauksen lisäksi annettu likiarvo (ei tarkka desimaalikukuarvo)	-1
Vastaus supistamattomassa muodossa	-1

$x = -\frac{5}{8}$ TAI $-0{,}625$	4
Väärä etumerkki	-1
Vastauksena oikean käänteisluku	-2
Vastaus supistamattomassa muodossa	-1
Murtolukua ei ole sievennetty loppuun asti	-2
Vain likiarvo	0

Likiarvoista ei kolmessa ensimmäisessä kohdassa saa pisteitä	
Liian pitkä vastaus (yli 30 merkkiä)	-1
Oikea vastaus väärässä laatikossa	$+0$

3.

$\frac{3}{y}$: kääntäen verrannollinen, ei kumpikaan	1+1
$2^{x-0,6}$: ei kumpikaan, eksponentiaalinen	1+1
$\frac{4t-2}{3}$: ei kumpikaan, polynominen	1+1
x^2+3x-1: ei kumpikaan, polynominen	1+1
$7t+3t$: suoraan verrannollinen, polynominen	1+1
$\frac{4x+2}{2x^2+x}$: kääntäen verrannollinen, ei kumpikaan.	1+1

4.		
	⊙ Kolmen joukkueen lohkoissa pelataan yhteensä 6 ottelua.	2
	⊙ Neljän joukkueen lohkoissa pelataan yhteensä 12 ottelua.	2
	Kolmen joukkueen lohkoja on 4 A- ja B-liigoissa ja 1 C- ja D-liigoissa.	(1)
	Neljän joukkueen lohkoja on 3 C- ja D-liigoissa eikä yhtään A- ja B-liigoissa.	(1)
	▽ Kolmen joukkueen lohkoja on yhteensä 10 ja neljän joukkueen lohkoja 6.	1
	Alkukarsinnoissa pelataan siis yhteensä $6 \cdot 10 + 12 \cdot 6$	2
	$= 132$ peliä	1
	⊙ Toinen kierros pelataan ainoastaan liigassa A, toisella kierroksella on 4 ottelua.	1
	⇒ Yhteensä 136 ottelua.	1
	Kahdella ensimmäisellä rivillä ei vaadita perusteluja.	
	Kahdella ensimmäisellä rivillä 3 ja 6 TAI 12 ja 24	1+1
	Kahdella ensimmäisellä rivillä muut luvut mutta jokin järkevä periaate	1
	Kahdella ensimmäisellä rivillä virhe, mutta muut laskut omilla luvuilla oikein; silloin pisteet (0–3) +1+1+1+2+0+1+0.	max 6–9
	Koko ratkaisu vain laskuja ilman selityksiä.	−3
	Tulkittu, että loppu- tai pronssiotteluita on kaksi.	−1
	Kuten yllä mutta laskettu $2 \cdot 132 + 4 = 268$	10
	TAI	
	⊙ Kolmen joukkueen lohkoissa pelataan yhteensä 6 ottelua.	2
	⊙ Neljän joukkueen lohkoissa pelataan yhteensä 12 ottelua.	2
	Liigat A ja B: $4 \cdot 6 = 24$ ottelua	2
	Liigat C ja D: $1 \cdot 6 + 3 \cdot 12 = 42$ ottelua	2
	Liigat yhteensä $2 \cdot 24 + 2 \cdot 42 = 132$ ottelua	2
	⊙ Toinen kierros pelataan ainoastaan liigassa A, toisella kierroksella on 4 ottelua.	1
	⇒ Yhteensä 136 ottelua.	1
	Samat lisäohjeet kuin yllä (soveltaen).	

B1-osa

5.		
	Times Squaren pinta-ala on noin $\frac{51000}{3} = 17000$ neliömetriä.	(2)
	Kullakin neliömetrillä $\frac{2000000}{51000} \cdot 3 \approx$	2
	118 TAI 120 ihmistä	1
	Kullakin noin $\frac{1}{118} \approx 0{,}0085\ \mathrm{m}^2 (= 85\ \mathrm{cm}^2)$ maata TAI $\frac{1}{120} \approx 0{,}0083\ \mathrm{m}^2$	2
	⊙ Järkevähkö arvio yhden (tai kahden) jalan mitoista: 5–15 cm ja 10–40 cm	(1+1)
	⊙ Yhden ihmisen kahden jalan vaatima pinta-ala on siis 100–1200 cm^2	2
	Oikea, järkevästi perusteltu johtopäätös, ja 83 TAI 85 cm^2 oikein	1
	Johtopäätöksen voi perustella ylimalkaisemmin, jos ei ole laskenut ihmisen jalan pinta-alaa.	max 8

6.		
	Laskut oheisessa taulukkolaskentatiedostossa.	
	moodi on 1 ja perustelu ”suurin frekvenssi”	1+1
	mediaani on 2 ja perustelu ”suhteellinen frekvenssi ylittää 0,5”	1+1
	keskiarvo on $1{,}84786\ldots \approx 1{,}85$ lasta	2
	kuvakaappaus: data ja tulokset; pyydetyt arvot poimittu	max 6
	vain kuvakaappaus data ja ohjelman tulokset (vastauksia ei poimittu)	max 5
	vain kuvakaappaus ohjelman tuloksista (vastauksia ei poimittu)	max 3
	Jos perheessä on k lasta, niin jokaisella heistä on $k-1$ sisarusta	2
	$\odot$ lasten kokonaismäärä 1046336	1
	sisarusten kokonaismäärä 1464824	2
	laskettu keskiarvo omilla arvoilla $(1{,}39955\ldots \approx 1{,}40)$	1
	Ensimmäinen rivi + kuvakaappaus data ja tulokset ja pyydetyt arvot poimittu	max 6
	Jos perheessä on k lasta, niin jokaisella heistä on k sisarusta...	max 4
	https://www.ylioppilastutkinto.fi/images/sivuston_tiedostot/Hyv_vast_piirt/FI_2020_K/n6_fi.ods	

7.		
	Kahdeksankulmio saadaan neliöstä poistamalla jokaisesta kulmasta suorakulmainen kolmio.	(1)
	Tällaisen kolmion kateetin pituus on $\frac{4{,}2}{\sqrt{2}} \approx 2{,}97$	2
	ja pinta-ala $\frac{4{,}2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{4{,}2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = 4{,}41$.	2
	Neliön pinta-ala on $(4{,}2 + 2 \cdot \frac{4{,}2}{\sqrt{2}})^2 \approx 102{,}81$.	2
	Kahdeksankulmion pinta-ala siis $(4{,}2 + 2 \cdot \frac{4{,}2}{\sqrt{2}})^2 - 2\frac{4{,}2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{4{,}2}{\sqrt{2}} \approx 85{,}17$.	2
	$\triangledown$ Tilavuus saadaan pohjan pinta-alan ja korkeuden tulona	(1)
	$\Rightarrow$ Tilavuus $(85{,}17 \cdot 6{,}6) \approx 562{,}14 \approx 560\ \mathrm{cm}^3$	2
	Tehtävän välivaiheet voi laskea myös desimaaliluvuilla.	
	TAI	
	Kahdeksankulmio muodostuu kahdeksasta tasakylkisestä kolmiosta.	(1)
	Kärkikulma on $360°/8 = 45°$.	(1)
	Puolet kärkikulmasta on siis $22{,}5°$	(1)
	ja kolmion korkeus $h = \frac{2{,}1}{\tan(22{,}5°)} \approx 5{,}07$.	2
	Kolmion ala on siis $\frac{1}{2} \cdot \frac{2{,}1}{\tan(22{,}5°)} \cdot 4{,}2 \approx 10{,}65$.	2
	Kahdeksankulmion pinta-ala on $8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2{,}1}{\tan(22{,}5°)} \cdot 4{,}2 \approx 85{,}17$.	2
	$\triangledown$ Tilavuus saadaan pohjan pinta-alan ja korkeuden tulona	(1)
	$\Rightarrow$ Tilavuus $(85{,}17 \cdot 6{,}6) \approx 562{,}14 \approx 560\ \mathrm{cm}^3$	2
	Tehtävän välivaiheet voi laskea myös desimaaliluvuilla.	
	TAI (Geogebra tms ratkaisu)	
	Piirretty konveksi 8-kulmio.	2
	Perusteltu säännöllisyys esim. kerrottu komento ”säännöllinen 8-kulmio”.	3
	Piirroksessa mitattu jokaisen sivun pituudeksi 4,2 TAI muu perustelu.	2
	Pinta-ala 85,17 ja perusteluna esim. komento.	(2)
	$\triangledown$ Tilavuus saadaan pohjan pinta-alan ja korkeuden tulona.	(1)
	$\Rightarrow$ Tilavuus $(85{,}17 \cdot 6{,}6) \approx 562{,}14 \approx 560\ \mathrm{cm}^3$	2

8.	$f'(x) = 4x - 1$ (2 p. per kerroin)	4
	perustelu derivaatan minimille	2
	$\Rightarrow$ derivaatta saa pienimmän arvonsa kohdassa $x = -1$.	2
	$\triangledown$ Funktio vähenee nopeimmin, kun derivaatta on mahdollisimman pieni.	2
	$\Rightarrow$ Funktio vähenee nopeimmin kohdassa $x = -1$.	2
	Piirretty funktion kuvaaja ja päätelty siitä tulos.	max 3
	Piirretty derivaatan kuvaaja, josta päätelty rivit 2 ja 3.	max 12

9.1.	Funktioiden $\cos x$ ja $\sin x$ jakso on 2π.	(2)
	Funktion $\cos^2(x)$ jakso on π.	2
	$\Rightarrow$ Funktion $\cos^2(2t)$ jakso on $\pi/2$.	3
	Funktion $\sin 3t$ jakso on $2\pi/3$.	3
	$\Rightarrow$ Funktion $\cos^2 2t$ jakso on lyhyempi.	2
	TAI (Geogebra tms. ratkaisu)	
	Piirretty $\cos^2(2t)$	1
	$\Rightarrow$ jakso on $\pi/2$	4
	Piirretty $\sin(3t)$	1
	$\Rightarrow$ jakso on $2\pi/3$	4
	$\Rightarrow$ Funktion $\cos^2 2t$ jakso on lyhyempi.	2
	Likiarvot kuvaajasta jaksoille: 1+1+1+1+2	max 6
	Graafinen ratkaisu, likiarvot jaksoille merkitty vain kuvassa: 1+0+1+0+2	max 4
	Graafinen ratkaisu, jaksoja ei merkitty tai selitetty: 1+0+1+0+0	max 2

9.2.	Binomikaava, maininta binomitodennäköisyydestä, tms.	(1)
	Kerroin on $\binom{10}{2}$ TAI $\binom{10}{8}$.	(2)
	Yhtä noppaa heitettäessä kuutosen todennäköisyys on $\frac{1}{6}$.	(2)
	Todennäköisyys saada muu kuin 6 on $\frac{5}{6}$.	(2)
	Todennäköisyys on $\binom{10}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^8$ (kolme tekijää 1, eksponentit 1+1)	3
	$\frac{5859375}{20155392}$ TAI 0,2907 (kaikki tarkkuudet hyväksytään).	2
	Rivit 2–4 voivat esiintyä missä järjestyksessä tahansa.	
	TAI (Geogebra tms. ratkaisu)	
	Käytetty binomitodennäköisyyttä	2
	Syötetty parametrit oikein: 10, 1/6, 2, täsmälleen (kaksi)	2+2+2+2
	Vastaus $\frac{5859375}{20155392}$ TAI 0,2907 (kaikki tarkkuudet hyväksytään).	2

B2-osa

10.

Kulut ovat 5 625 euroa (pelkkä tulos 2 p., jos lasku dokumentoitu, mutta laskuvirhe tai joku luku unohtunut, niin 1 p.).	2
Neuleita täytyy siis myydä $\frac{5625}{70} \approx 80{,}4$, eli vähintään 81 TAI 80,4 TAI 80 (tämä tarkkuus; riittää laskea omalla luvulla).	2
Laskettu riittävyys $81 \cdot 70 = 5670$, jälkimmäisestä kohdasta	1

$100 \cdot 0{,}25 \cdot 39 = 975 > 400$ TAI $\frac{400}{0{,}25 \cdot 39} \approx 41 < 100$ tai muu variaatio	3
eli lankaa varten ei ole varattu riittävästi rahaa.	1
-1/virheellinen luku tai lasku	

Vastauksen seikkojen vaikutus realistinen, esimerkiksi veroa maksetaan valtiolle, se ei mene yhtiölle, lomalla työntekijät saavat palkkaa, mutta eivät tee työtä, jne.	1
ALV-huomioista (0–3 p.), esimerkiksi	
Tuotteen ALV oikein laskettu: $70/1{,}24/ \approx 56{,}45$ (yrityksen tulot samalla myyntihinnalla)	1
tai $70 \cdot 1{,}24 = 86{,}80$ (verollinen myyntihinta)	1
ALV:stä vain osa jää yrityksen lopulliseksi kuluksi, sillä yritys voi vähentää verotuksessa ostamiensa tuotteiden ja palvelujen ALV:t.	1
Palkka- ja vuokrakuluissa ei kuitenkaan ole ALV:a, ja joissain muissa kustannuksissa saattaa olla alempi AVL-kanta, joten suuri osa ALV:sta tulee yrityksen lopulliseksi kustannukseksi.	1
Alle 10 000 euron liikevaihdolla ei tarvitse maksaa ALV:a	1
Loma-huomioista (0–2 p.), esimerkiksi	
”Lomat aiheuttavat lisäkuluja”	+0
Suomessa yleensä vietetään noin 1 kk kesälomaa, joten yrityksen tulot täytyy saada noin 11 kk työllä.	1
Jos Pauli ja Johanna ovat lomalla eri aikaan, voi myynti olla auki läpi vuoden, jolloin täytyy vain varmistaa, että heillä on riittävästi neuleita valmiina ennen lomaa.	1
Siten loma ei välttämättä vaikuta yrityksen budjettiin.	1
Jos firma haluaa palkata työntekijöitä, ja jos heille maksetaan lomarahat, tulee myös ne huomioida.	1
Muita asiaan liittyviä olennaisia huomioita (0–2 p.), esimerkiksi	
Laskettu millä tuotannolla voidaan kattaa aiempia lisäkustannuksia	1
Huomioitu myös kasvava lankakulutus laskuissa	1
Oikeiden seikkojen seassa myös virheellisiä seikkoja	-1

11.		
	Nelitahokkaan pohja on tasasivuinen kolmio,	1
	jonka sivun pituus on 1 ja korkeus $\sqrt{3}/2$ TAI sijoitus $a = 1$ kaavaan $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$	(2)
	ja ala $\frac{\sqrt{3}}{4}$.	2
	(Tilavuus on suoraan verrannollinen pohjan pinta-alan ja korkeuden tuloon), joten maksimoidaan korkeus.	(1)
	Korkeus on $\sqrt{\frac{3}{4} - x^2}$ tai $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta$ (1 p.), jonka suurin arvo saavutetaan kun $x = 0$ tai $\theta = 90$ astetta (2 p.) TAI korkeus on suurimmillaan, kun kolmiot ABC ja ABD ovat kohtisuorassa (3 p.).	3
	Korkeus on tällöin tasasivuisen kolmion korkeus, eli $\sqrt{3}/2$.	1
	$\Rightarrow$ Tilavuus on $\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{8}$.	2
	Likiarvojen käytöstä vähennykset -1 p. rivillä 3 ja -1 p. viimeisellä rivillä	-2
	TAI	
	Tehtävä on periaatteessa mahdollista ratkaista myös asettamalla muu kuin tasasivuinen kolmio pohjaksi, muodostamalla tilavuuden lauseke, jonka derivoi, jne. Tällöin pisteet: pohjakolmion ala (2 p.), korkeuden lauseke (3 p.), tilavuuden lauseke (3 p.), derivointi ja nollakohdat (2 p.), sijoitus kaavaan ja johtopäätös (2 p.).	
	Säännöllisen tetraedrin tilavuuskaavalla $\frac{1^3\sqrt{2}}{12}$	+0
	Tasasivuisen kolmion pinta-alakaava ilman sijotusta $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$	+0
	Laskettu jonkun toisen tasasivuisen kolmion pinta-ala	+0
	Tetraedrin tilavuuskaava $\frac{1}{3}Ah$ ilman järkevästi laskettua korkeutta ja pinta-alaa	+0
	Jaossa olevat irtopisteet, ei yhdistettävissä muiden pisteiden kanssa eikä keskenään:	
	Alkupisteet: mainittu jonkin avaruuskulman jokin kohtisuoruus (mikä tahansa) TAI Idea derivoinnista: derivoitu jotain funktiota, mahdollisesti väärin	max 1
	Alkupisteet: Piirretty hyvä kuva, joka vastaa todellista maksimitilannetta, luettu kuvasta tilavuus 1 desimaalin tarkkuudella oikein TAI selitetty sanallisesti, että tarkastellaan joukkoa nelitahokkaita, jossa pohja on kiinnitetty ja maksimoidaan korkeutta.	max 2

12.	Toiseen asteen termin kerrointa ei voi annetuista tiedoista päätellä.	2
	⊙ Perustelu: Annettu polynomin lauseke, jossa x^2-kerroin on positiivinen (1 p.) ja tarkistettu ehdot (1 p.); toinen esimerkki negatiivisella kertoimella samalla tavalla (2 p.) TAI	4
	positiivinen etumerkki vastaa ylöspäin aukeavaa, negatiivinen alaspäin aukeavaa paraabelia (1 p.) ja ehdot $p(-2) < 0$ ja $p(1) > 0$ toteuttava paraabeli voi aueta kumpaan suuntaan tahansa (1 p.)	
	Nollakohtia on kaksi,	2
	sillä polynomi saa sekä positiivisia että negatiivisia arvoja (joten sillä on ainakin yksi nollakohta)	2
	ja yksi nollakohta on mahdollinen vain, jos polynomi sivuaa x-akselia.	2
	Ilman konkreettisia esimerkkejä (TAI-kohdan jälkimmäinen tapaus)	max 10
	TAI	
	Toiseen asteen termin kerrointa ei voi annetuista tiedoista päätellä.	2
	Perustelu: Piirretty oikean näköinen kuva, joka näyttää esittävän kahta paraabelia oikeilla rajoituksilla	1
	Annettu paraabelien yhtälöt (2 p.) TAI positiivinen etumerkki vastaa ylöspäin aukeavaa, negatiivinen alaspäin aukeavaa paraabelia (1 p.)	2 TAI 1
	Merkitty kriittiset pisteet paraabelilta tai x-akselilta TAI selitetty miksi annetut paraabelit toteuttavat vaaditut ehdot	1
	Nollakohtia on kaksi,	2
	sillä polynomi saa sekä positiivisia että negatiivisia arvoja (joten sillä on ainakin yksi nollakohta)	2
	ja yksi nollakohta on mahdollinen vain, jos polynomi sivuaa x-akselia.	2
	Nollakohtia tutkittu vain esimerkkien avulla.	+0

13.	⊙ Meeri on laskenut nollakohdat väärin,	1
	sillä $x = \frac{1}{2}$ ei toteuta yhtälöä $6x^2 - 14x + 5 = 0$ TAI sillä nollakohdat ovat $x = \frac{7 \pm \sqrt{19}}{6}$ (sieventämätön tai likiarvot riittävät).	1
	⊙ Meeri on sijoittanut virheellisesti derivaatan nollakohdan derivaatan eikä funktion lausekkeeseen.	3
	Lisäksi Meeri ei ole tutkinut välin päätepisteitä, joissa suurin arvo saattaa myös sijaita TAI tutkinut sitä päätepistettä, jossa kulkukaavion mukaan pitäisi tutkia funktiota.	3
	Oikea ratkaisu:	
	Nollakohdat ovat $\frac{7 \pm \sqrt{19}}{6}$.	1
	Merkkikaavion mukaan funktion käyttäytyminen välillä on $+\vert-\vert+$. Laskettu funktion arvot kohdissa $x = \frac{7-\sqrt{19}}{6}$ ja $x = 3$ TAI tutkittu molemmat nollakohdat sekä välin päätepisteet. (Jos katsottu vain kuvaajasta, tästä kohdasta 0 p.)	2
	$\Rightarrow$ suurin arvo on $2 \cdot 3^3 - 7 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 = 6$ TAI $f(3) = 6$.	1
	Oikeana ratkaisuna esitetty vain laskimen max-käskyyn nojautuva	+0
	Kuvaaja piirretty	+0
	Vain nollakohtien likiarvot (kolmanneksi viimeinen rivi)	−1
	Virheettömiä seikkoja mainittu virheenä	−1
	Tulkinnanvaraisia seikkoja mainittu virheenä, esim. ”maksimin ja suurimman arvon samaistaminen”	±0