YLIOPPILASTUTKINTOLAUTAKUNTA
STUDENTEXAMENSNÄMNDEN

# Matematik, lång lärokurs 22.9.2020
# Slutgiltiga beskrivningar av goda svar 12.11.2020

Grunderna enligt vilka bedömningen gjorts framkommer i de slutgiltiga beskrivningarna av goda svar. Uppgiften om hur bedömningsgrunderna tillämpats på examinandens provprestation utgörs av de poäng som examinanden fått för sin provprestation, de slutgiltiga beskrivningarna av goda svar och de föreskrifter gällande bedömningen som nämnden gett i sina föreskrifter och anvisningar. De slutgiltiga beskrivningarna av goda svar innehåller och beskriver inte nödvändigtvis alla godkända svarsalternativ eller alla godkända detaljer i ett godkänt svar. Eventuella bedömningsmarkeringar i provprestationerna anses vara jämställbara med anteckningar och sålunda ger de, eller avsaknaden av markeringar, inte direkta uppgifter om hur bedömningsgrunderna tillämpats på provprestationen.

Av en god prestation framgår det hur examinanden har kommit fram till svaret. I lösningen måste det ingå nödvändiga uträkningar eller andra tillräckliga motiveringar och ett slutresultat. I bedömningen fästs uppmärksamhet vid helheten och vid de tre stegen start, mellansteg och slutresultat. Räknefel som inte väsentligt ändrar uppgiftens natur ger ingen betydande sänkning av antalet poäng. Räknefel och fel i den matematiska modellen som ändrar uppgiftens natur kan däremot sänka antalet poäng avsevärt.

I provet är räknaren ett hjälpmedel, och dess roll bedöms separat för varje uppgift. Om symbolräknare använts i en uppgift ska det framgå av prestationen. I lösningar av uppgifter som kräver analys räcker det inte enbart med ett svar som erhållits med hjälp av räknaren utan övriga motiveringar. Däremot räcker ett svar som examinanden fått med räknaren i allmänhet i rutinberäkningar. Detsamma gäller rutinmässiga delar av mera omfattande uppgifter. Exempel på sådana är omskrivning av uttryck, ekvationslösning samt derivering och integrering av funktioner.

## Hur bedömningsanvisningarna ska tolkas

- Strukturen på en anvisning
  - Uppdelade poäng i en rad är åtskiljda med /-tecknet I oklara fall har specificerats från vilken del som man får vilka poäng.
  - Det finns ingen specificering om det på raden finns lika många uträkningar som poäng - i så fall ges en poäng per uträkning.
  - Om en rad består av en uträkning och en motivering i ord i anknytning till den, så härrör hälften av poängen från uträkningen (avrundande uppåt) och resten från motiveringarna.
  - Om det på en rad endast finns en uträkning eller en formel och flera poäng, så får man delpoäng för ett tillräckligt bra försök (till exempel beräkning av derivatan delvis rätt).
  - En uträkning eller motivering i parentes på en rad är tilläggsinformation som inte behövs för att ge poäng.
  - Poäng i parentes ges automatiskt om följande rad är i skick.

- I allmänhet drar ett räknefel bort poäng från den rad som felet gäller men man kan få de följande radernas poäng om man gör uträkningarna/slutledningarna korrekt för de egna talen. Undantag är betecknade med denna färg. Då ska lösningen bestå av korrekt tal eller uttryck eller motsvarande så när som på den ekvivalenta utformningen.
- Radernas beroende av varandra
  - I allmänhet är poänganvisingen skriven enligt lösingens matematiska progression och (fulla) poäng ges bara för motiverade steg. Om raderna är uppenbart oberoende av varandra (till exempel olika funktioners derivator har beräknats) ges poängen oberoende av prestationsordning utan särskild notering.
  - Om svaret är skrivet före motiveringarna betyder det att man för blotta (korrekta) svaret redan får poäng.
  - Beteckningen $\bigtriangledown$ i början av en rad betyder att radens poäng kan ges oberoende av de tidigare raderna; de följande raderna förutsätter denna rad på normalt sätt.
  - beteckningen $\bullet$ i början av en rad betyder att radens poäng kan ges oberoende av de tidigare raderna; de följande raderna förutsätter inte denna rad.
  - Beteckingen $\Rightarrow$ poängterar att man får de ifrågavarande poängen endast om de tidigare motiveringarna är i skick.
- Terminologi
  - ”Startpoäng” betyder att härifrån kan man ge radens poäng om man inte får poäng från annat håll. Denna poäng kan alltså inte kombineras med andra poäng.
  - ”maxN” betyder att för en lösning av denna typ ges N poäng om det inte finns andra fel i lösningen.
  - ”Svaret endast som närmevärde” betyder att svarets exakta värde inte alls framgår i lösningen.

Följande avdrag är av sekundär betydelse för den uppgiftsspecifika poänganvisningen. På ett ställe kan man tillämpa flera avdrag, men man kan inte förlora intjänade poäng.

- Svaret korrekt, men inte i den efterfrågade formen (t.ex. noggrannhet, enhet) $-1$ p.
- Svaret är inte förenklat till slut i en förenklingsuppgift (t.ex. $e^1$, $\ln(e)$ eller $4^0$) $-2$ p.
- Svaret är oförenklat i en annan uppgift (t.ex. $e^1$, $\ln(e)$ eller $4^0$) $-1$ p.
- Uppenbara inmatningsfel i framställningen (t.ex. $x = 2$, $y04$), eller inmatningsfel som korrigeras direkt på följande rad $-0$ p.
- Kopieringsfel i svaret $-1$ p.
- Inga flera gällande siffror i en mellanavrundning än i svaret $-1$ p.

Följande avdrag är av sekundär betydelse för den uppgiftsspecifika poänganvisningen. På ett ställe kan man tillämpa flera avdrag, man vardera avdrag högst en gång

- Matematiskt bristfällig beteckning (t.ex. parenteser som fattas men korrekt beräknat; $=$-tecknet använt ”i kedja”, m$^2$ utan m). Obs! Beroende på situationen så kan en ostandardiserad beteckning godkännas som förklarad. $-1$ p.
- I lösningen saknas väsentliga förklaringar (läsarens måste gissa vad talen i lösningen betyder) ELLER motiveringarna och slutledningarna är framställda helt lösryckta (läsaren måste kombinera uttryck från olika delar av lösningen) $-1$ p.
- Betydande överflödig text eller överflödiga beräkningar i en lösning (läsaren måste dra slutsatser om hur lösningen utformas utifrån den givna informationen) $-1$ p.

## Uppgiftsspecifika anvisningar

### Del A

**1.**

| | |
|---|---|
| $x = -\frac{1}{2}$ | 3 |
| $a = 9$ | 3 |
| Ekvationen har inga lösningar. | 3 |
| $b = 11$ | 3 |

**2.**

| | |
|---|---|
| $-8x^4$ | 2 |
| Korrekt svar, men oförenklat; tecken/koefficient/exponent två av tre är korrekta ($-c \cdot x^4; 8x^4; -8x^k$); $(2x)^4/(-2)$. | 1 |
| 10, ”Avståndet är 10”, ”Avståndet mellan punkterna är 10”, $d = 10$, $AB = 10$, ”10 (eller $-10$)”. | 2 |
| $100^{1/2}$, 100, $10^2$ | 1 |
| $3x^2 - 4x$ | 2 |
| Den ena termen korrekt; $3x^2 - 4x + \ldots$; korrekt svar, men oförenklat. | 1 |
| 135 | 2 |
| Svar i radianer; svar med fel noggrannhet; 135 och ...; 135 + ...; 45. | 1 |
| 4 | 2 |
| Koefficienten fel (svar 1 eller 2); $-4$; $4 + c$. | 1 |
| 82 | 2 |
| $122\sin(42)/\sin(83)$; 82,2...; 62 (uträkning utan sinus); 115 (sinus i radianer) | 1 |

**3.**

| | |
|---|---|
| Genom att använda exponentialfunktionen $\frac{y}{1-y} = e^{a+bx}$,<br>av vilket vi får $y = (1-y)e^{a+bx}$,<br>vilket ger $y(1 + e^{a+bx}) = e^{a+bx}$<br>och vidare $y = \frac{e^{a+bx}}{1+e^{a+bx}}$. | 2<br>(1)<br>(1)<br>2 |
| Fel ln-formel i början, som till exempel $\ln(a/b) = (\ln a)/(\ln b)$, ger inga poäng i uppgift 3.1.<br>Startpoäng: Examinanden har i början använt någon ln- eller exp-formel korrekt, som till exempel $\ln(a/b) = \ldots$, men uträkningen framskrider inte ELLER definitionsvillkor.<br>Fel bas i logaritmen (0+1+1+2).<br>Definitionsvillkor krävs inte. | 0<br>1<br>4 |
| Substitutionen korrekt $y = 0{,}5$, $a = 2$ och $b = -1$ (resultat $\ln \frac{0{,}5}{1-0{,}5} = 2 - x$).<br>Förenkling av bråket och användning av $\ln 1 = 0$.<br>Av den framberäknade ekvationen $(2 - x = 0)$ har examinanden erhållit svaret $(x = 2)$. | 1+1+1<br>2<br>1 |
| ELLER | |
| Examinanden har löst ut $x$ i uttrycket.<br>Korrekta substitutioner.<br>Förenkling av svaret från den egna formeln $(x = 2)$. | 1<br>1+1+1.<br>2 |
| $a$ och $b$ omsvängda (svar $x = \frac{1}{2}$).<br>Genom prövning $x = 2$ och kontroll (3+1+0).<br>Om examinanden har använt sig av den härledda formeln i deluppgift 3.1 och formeln är fel:<br>ett litet fel i deluppgift 3.1 (exempelvis ett slarvfel eller om fel bas blivit kvar från deluppgift 1.), av deluppgift 3.2.<br>stort fel i deluppgift 3.1 (exempelvis egna räkneregler för logaritm), av deluppgift 3.2. | max4<br>max4<br>max6<br>max3 |

**4.**

| | |
|---|---|
| Beräknad derivata/riktningskoefficient för tangenten $k = 3x^2 - 10x + 2$. | 2 |
| I punkten (2,0) är $k = -6$. | 1 |
| Enligt ledtråden är tangenten $y - 0 = -6(x - 2)$ eller en ekvivalent form (också felaktigt $k$ duger) (Substitution av punkten 1p, substitution av riktningskoefficienten 1p). | 2 |
| Substitution av termerna $k = 3x^2 - 10x + 2$ och $y = (x-4)(x-2)(x+1)$ i den allmänna formen $y - 0 = k(x-2)$. | 2 |
| Examinanden har förkortat bort $x - 2$ och fått $2x^2 - 7x + 6 = 0$. | 2 |
| Ny lösning $x = 3/2$ (och den gamla $x = 2$). | 1 |
| Riktningskoefficienten $k = -\frac{25}{4}$ | 1 |
| och tangentens ekvation $y - 0 = -\frac{25}{4}(x-2)$ eller en ekvivalent form. | 1 |
| ELLER | |
| Den föregående lösningens rader 1–3. | 5 |
| Substitution av ekvationen $y = (x-4)(x-2)(x+1)$ i den allmänna formen $y - 0 = k(x-2)$. | 1 |
| Examinanden har förkortat bort $x - 2$ och fått $x^2 - 3x - 4 = k$. | 2 |
| Diskriminanten $9 - 4(-4-k) = 0$. | 1 |
| Riktningskoefficienten $k = -\frac{25}{4}$ | 1 |
| och tangentens ekvation $y - 0 = -\frac{25}{4}(x-2)$ eller en ekvivalent form. | 1 |
| Förklaring varför diskriminantvillkoret ger den passande tangenten. | 1 |
| ELLER | |
| Riktningskoefficienten för tangenten till kurvan i punkten $(x_0, y_0)$ är $3x_0^2 - 10x_0 + 2$, | 2 |
| dvs. ekvationen för den tangent som dras till kurvan i punkten $(x_0,y_0)$ är $(3x_0^2 - 10x_0 + 2)(x - x_0) = y - y_0$, | 1 |
| dvs. $(3x_0^2 - 10x_0 + 2)(x - x_0) = y - (x_0^3 - 5x_0^2 + 2x_0 + 8)$. | 1 |
| Linjen måste gå genom punkten (2,0), dvs. ekvationen $(3x_0^2 - 10x_0 + 2)(2 - x_0) = -(x_0^3 - 5x_0^2 + 2x_0 + 8) = -(x_0 - 4)(x_0 - 2)(x_0 + 1)$ måste vara sann. | 2 |
| Ekvationen är sann om $x_0 = 2$, varvid $y_0 = 0$, | 1 |
| dvs. tangentens ekvation är $y = (3 \cdot 2^2 - 10 \cdot 2 + 2)(x-2) = -6(x-2) = -6x + 12$, | 1 |
| eller då $(3x_0^2 - 10x_0 + 2) = (x_0 - 4)(x_0 + 1)$, | 1 |
| av vilket vi med rotformeln får $x_0 = 2$ eller $x_0 = \frac{3}{2}$, | 1 |
| dvs. riktningskoefficienten är $3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 10 \cdot \frac{3}{2} + 2 = -\frac{25}{4}$, | 1 |
| och tangentens ekvation är $y - \frac{25}{8} = -\frac{25}{4}\left(x - \frac{3}{2}\right)$ dvs. $y = -\frac{25}{4}x + \frac{25}{2}$. | 1 |

| | |
|---|---|
| Om derivatan är fel, förlorar examinanden en poäng från deriveringen och en poäng från båda linjernas ekvationer. | max9 |
| Kontroll saknas: (2,0) satisfierar ekvationen. | −0 |

## Del B1

| | | |
|---|---|---|
| **5.** | Trianglarnas gemensamma del är en femhörning som kan delas upp i två symmetriska trapetser. | (1) |
| | Trapetsets bredd är 1/2. | 1 |
| | (Utgående från likformiga trianglar) satisfierar den längre vertikala sidans längd $h$ ekvationen $h/(7/2) = 3/4$, | 2 |
| | dvs. $h = 21/8$. | 1 |
| | På motsvarande sätt satisfierar den kortare vertikala sidans längd $y$ ekvationen $y/3 = (21/8)/(7/2)$, | 2 |
| | dvs. $y = 9/4$. | 1 |
| | Trapetsets area är $\frac{1}{2}(h+y) \cdot \frac{1}{2} = 39/32$, | 2 |
| | dvs. den efterfrågade arean är $2 \cdot 39/32 = 39/16$. | 2 |
| | En (ordentligt) felaktig tillämpning av likformighet mellan trianglar i raderna 3–6 | 1 |
| | ELLER | |
| | Den gemensamma delen är en femhörning som kan delas upp i en rektangel och en triangel. | (1) |
| | Triangelns/rektangelns/femhörningens bredd är 1. | 1 |
| | Rektangelns höjd är 9/4 med stöd av likformighet. | 3 |
| | Triangelns höjd är 3/8 med stöd av likformighet. | 3 |
| | Arean $1 \cdot 9/4 + 1/2 \cdot 1 \cdot 3/8$ | 1+2 |
| | $= 39/16$. | 1 |
| | ELLER (GeoGebra) | |
| | Figur med korrekta mått. | 2 |
| | Femhörningens hörnpunkter har tagits ut. | 3 |
| | Areans närmevärde (minst en decimal) 2,4375. | (2) |
| | Areans exakta värde. | 2 |
| | Examinanden har förklarat vad som gjorts eller använda kommandon framgår, hörnpunkterna har tagits ut med kommandot Skärning mellan två objekt (berättat i ord eller syns som ett kommando), månghörningen är skapad med kommandot Polygon (berättat i ord eller syns som ett kommando). | 3 |
| | Mellanstegen beräknade med närmevärden.<br>Observera att det exakta värdet kan vara givet i decimaler, eftersom $\frac{39}{16} = 2{,}4375$.<br>Av lösningen måste emellertid framgå att det är fråga om ett exakt värde. | max 10 |

| | | |
|---|---|---|
| **6.** | Vattenledningens ändpunkt är $A = (9/5, 12/5, -2)$. | 2 |
| | En allmän punkt på stamröret är i formen $(4 - 2t, 4 + 3t, -3)$. | 2 |
| | Ett bildat villkor för ortogonalitet (kortaste avståndet) med hjälp av skalär produkt ELLER ett bildat villkor för avståndet mellan punkterna som funktion av $t$ i formen $\left(\sqrt{13t^2 + \frac{4}{5}t + \frac{42}{5}}\right)$. | 2 |
| | I anslutningspunkten är $t = -2/65$ ELLER så har examinanden sökt efter nollställen till derivatan och korrekt bestämt derivatans nollställe ($t = -2/65$). | 2 |
| | Koordinaterna för anslutningspunkten $B$ är $(264/65, 254/65, -3)$ ELLER motivering till att nollstället är ett minimiställe samt substitution i uttrycket för avståndet. | 2 |
| | Avståndet mellan punkterna $A$ och $B$ är $2{,}8961 \approx 2{,}9$ (meter). | 2 |
| | ELLER | |
| | Vattenledningens ändpunkt är $A = (9/5, 12/5, -2)$. | 2 |
| | Examinanden har bestämt ekvationen för stamrörets linje i det fall där $z$ är konstant. | 2 |
| | Examinanden har projicerat vattenledningens ändpunkt till planet $z = -3$. | 1 |
| | Avståndet mellan den projicerade punkten och linjen har beräknats. | 3 |
| | Avståndet i rymden har beräknats med Pythagoras sats. | 2 |
| | Avståndet mellan punkterna $A$ och $B$ är $2{,}8961 \approx 2{,}9$ (meter). | 2 |
| | ELLER (Geogebra-lösning) | |
| | Ritad figur/ritade figurer av hela situationen. | 2 |
| | I figurerna är måtten korrekta (axlarna och punkternas koordinater syns). | 2 |
| | Kommandon/algebrafönstret är synligt + lösningen förklarad 4p + 2p ELLER en tillräckligt detaljerad redogörelse för vad som gjorts och vilka kommandon som använts. | 6 |
| | Avståndet mellan punkterna $A$ och $B$ är $2{,}8961 \approx 2{,}9$ (meter). | 2 |
| | ELLER (Geogebra-lösning med glidare eller dragning) | |
| | Ritad figur/ritade figurer av hela situationen. | 2 |
| | I figurerna är måtten korrekta (axlarna och punkternas koordinater syns). | 2 |
| | Svaret ur figuren eller genom prövning, noggrannhet minst 2,896. | 2 |
| | Proceduren som ger närmevärdet är förklarad (exempelvis punkt på en linje, vinkel ELLER sfärens radie med glidarverktyget). | 2 |
| | Ur figuren framgår att proceduren har fungerat (till exempel är vinkeln ungefär 90 grader ELLER sfären tangerar linjen). | (2) |
| | Motivering till varför svaret är givet med just examinandens givna noggrannhet (exempelvis motiverat att svaret inte är mindre än 2,85 och inte större än 2,95 om svaret är 2,9). | 2 |

| | |
|---|---|
| Endast svar eller svaret och bilden ger inte mer poäng än vad enbart en bild skulle ge. Nästan varje något så när förnuftigt vald punkt på stamröret ger 2,9. | +0 |

| | | |
|---|---|---|
| **7.** | $P(2) = 0{,}82^2 = 0{,}6724 \approx 0{,}67$. | 3 |
| | Binomialfördelningsverktyget är ok (poäng för användning av verktyget 1p, avläsning 1p, avrundning 1p, obs. om texten ”binomialfördelning”, så ger det även en poäng till följande deluppgift). | |
| | $P(2) = p \cdot p = p^2$. | 1 |
| | Sannolikheten för att ett enskilt kast misslyckas är $1 - p$. | (1) |
| | $P(0) = (1 - p)^2$. | 1 |
| | Sannolikheten för händelsen "1. i korgen, 2. inte i korgen" är $p(1 - p)$ | (1) |
| | och för händelsen "1. inte i korgen, 2. i korgen" $(1 - p)p$. | (1) |
| | Därmed är $P(1) = 2p(1 - p)$ ELLER $P(1) = 2p - 2p^2$. | 1 |
| | Examinanden har glömt att man kan få en korg på två olika sätt i fallet $P(1)$, poängen 1+1+1+1+0+0. | max4 |
| | Formlerna är korrekta, på parameterns plats 0,82 (0+0+0+1+0+1). | max 2 |
| | ELLER | |
| | Examinanden har nämnt upprepat försök eller binomialfördelning framgår. | 1 |
| | Sannolikheten för att ett enskilt kast misslyckas är $1 - p$. | 1 |
| | $P(0)$, $P(1)$ och $P(2)$. | 1+1+1 |
| | Binomialkoefficienterna är förenklade. | 1 |
| | Om exponenterna är oförenklade används allmänt poängavdrag en gång. | $-1$ |
| | Ur villkoret $P(1) = P(2)$ får vi ekvationen $2p - 2p^2 = p^2$, | 1 |
| | vars lösningar är $p = 0$ och $p = 2/3$ (även $p = 0{,}67$ ok) . | 2 |
| | Om examinanden har beräknat $P(1)$ eller $P(2)$ fel i föregående deluppgift, uppgift 7.3 har blivit korrekt löst med hens egna uttryck och uppgiftens karaktär inte har förändrats (ekvation av andra graden, minst två termer av olika gradtal, möjliga orimliga lösningar har bortlämnats), inga poängavdrag. | 3 |
| | Om $p = 0$ har lösts ut, men blivit förkastad som orealistisk, inga avdrag. | |
| | Genom prövning $p = \frac{2}{3} \approx 0{,}67$ (eller motsvarande från sin egen ekvation) och kontroll (algebraiskt eller med ett program). | max 1 |

| | | |
|---|---|---|
| **8.** | $A_2 = \int_1^\infty (x^{-2} - x^{-3})\,dx$ (gränser+funktion som ska integreras) | 2 |
| | $= \frac{1}{2}$. | 1 |
| | Motivering: Integralfunktion korrekt ELLER redogörelse för att man använt räknare. | 1 |
| | Uträkningar och slutsatser som är gjorda i deluppgift 8.2 räknas till godo också i deluppgift 8.1 (till exempel om formeln $\frac{1}{n(n-1)}$ använts i 8.1 och blivit härledd i 8.2). | |
| | $A_n = \int_1^\infty \left(x^{-n} - x^{-(n+1)}\right) dx$ (gränser 1p+funktion 2p) | 3 |
| | integralfunktion korrekt ELLER behandling av gränsvärden | 1 |
| | $= \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ | 2 |
| | $= \frac{1}{n^2-n}$. | 2 |
| | Observera att andra raden krävs för att man ska kunna dela ut poäng för de två sista raderna. | |
| | $\frac{1}{\infty} = 0$ osv. | $-0$ |
| | Startpoäng: Figur ELLER beräkning av skärningspunkterna. | max 1 |

| | | |
|---|---|---|
| **9.** | Examinanden har nämnt delbarhet OCH skrivit ut fakulteteten som en produkt. | (1+1) |
| | Talet $n = 1000001!$ är delbart med talet 2, | 1 |
| | dvs. det första talet $n+2$ är delbart med talet 2, | 1 |
| | och är alltså inte ett primtal. | 1 |
| | På samma sätt gäller att talet $n$ innehåller faktorn $k$ för värdena $3 \leqslant k \leqslant 1000001$ | 2 |
| | och är därmed delbart med talet $k$. | 1 |
| | Då är även talet $n+k$ delbart med talet $k$. | 2 |
| | För värdena $2 \leqslant k \leqslant 1000001$ får vi alltså efter varandra följande sammansatta tal $n+k$, | 1 |
| | som totalt är en miljon till antalet. | 1 |
| | Observationen att hälften av de på varandra efterföljande talen är jämna och därmed delbara med två är additiv med endast första raden. | 1 |
| | Ett allmänt tal $k$ behöver inte synas i lösningen, utan det är tillräckligt om man tagit någon av de första faktorerna och någon av de sista på ett sätt som gör lösningen generell, och också konstaterat att så är fallet. Prövning räcker inte - av lösningen måste den allmänna idén framgå (till exempel för något talvärde) och examinanden behöver explicit konstatera att den gäller generellt. | |
| | På grund av ett fel som skedde i det tekniska utförandet av provet var det inte möjligt att använda formeleditorn i uppgiften. Ett svar som fogats till svarsfältet för en annan uppgift godkänns. Vid bedömningen har beaktats att det kan finnas problem i beteckningarna på grund av det tekniska felet. | |

## Del B2

| | | |
|---|---|---|
| **10.** | Om funktionen $f$ är deriverbar i punkten $a$, så är den kontinuerlig i punkten $a$. | 3 |
| | Allmänt gäller inte följande påståenden:<br>Om funktionen $f$ är kontinuerlig i punkten $a$, så är den deriverbar i punkten $a$.<br>Funktionen $f$ är kontinuerlig i punkten $a$ exakt då den är deriverbar i punkten $a$.<br>Om funktionen $f$ har ett gränsvärde i punkten $a$, så är den kontinuerlig i punkten $a$.<br>Om funktionen $f$ har ett gränsvärde i punkten $a$, så är den deriverbar i punkten $a$. | 1/deluppgift, tot. 7 |
| | (a) Kontinuitet $\Rightarrow$ deriverbarhet eller (c) kontinuitet $\Leftrightarrow$ deriverbarhet:<br>Som exempel kan vi använda $f(x) = \sqrt{\lvert x \rvert}$ eller $f(x) = \lvert x \rvert$, då $x = 0$. | 1 |
| | (d) Gränsvärde $\Rightarrow$ kontinuitet eller (e) Gränsvärde $\Rightarrow$ deriverbarhet:<br>Som exempel fungerar $f(x) = x$, då $x \neq 1$, $f(1) = -1$, och då vi undersöker punkten $x = 1$. | 1 |
| | Exemplen behöver inte motiveras, dvs. inga avdrag för felaktiga motiveringar. Man behöver inte berätta vilken punkt som granskas i exempelfunktionen. Det bör framgå för vilket påstående motexemplet i fråga fungerar.<br>Om exempelfunktionen inte är definierad i den punkt som granskas delas inga poäng ut. | |

| **11.** | | |
|---|---|---|
| | Examinanden har löst ut en allmännare ekvation (ex. genom kvadrering) ELLER skrivit om den som en tangensekvation ELLER eliminerat sinus eller cosinus genom kvadrering ELLER $\pi$:s multiplar är kvar. | (1) |
| | $x = \frac{3}{4}\pi$ | 1 |
| | Inga motiveringar behövs, solve duger. | |
| | $(\sin x)^2 + \sin x \cos x + (\cos x)^2 = 1 + \sin x \cos x (= 0)$ | 2 |
| | $\sin 2x = -2$ | (1) |
| | $\sin x \cos x = -1$ är omöjligt, eftersom $-1 \leqslant \sin x, \cos x \leqslant 1$ och $\lvert \sin x \rvert$ och $\lvert \cos x \rvert$ aldrig samtidigt är 1 ELLER $\sin 2x$ alltid är minst $-1$. | 1 |
| | ELLER | |
| | $\tan^2 x + \tan x + 1 (= 0)$, | 2 |
| | examinanden har löst en andragradsekvation, och konstaterat att det inte finns några lösningar. | 2 |
| | Ekvationen multipliceras ledvis med termen $\sin x - \cos x$, vilket ger $\sin^{n+1} x - \cos^{n+1} x = 0$ ELLER omskrivning till en summa av tangensfunktioner och användning av formeln för en geometrisk summa ELLER förlängning till formen $\frac{\sin^{n+1} x - \cos^{n+1} x}{\sin x - \cos x}$. | 1 |
| | Om nämnaren består av $\sin x - \cos x$ eller $1 - \tan x$, så granskas fallet där nämnaren är noll; annars får man den här poängen automatiskt. | 1 |
| | Om $n+1$ är udda, omskrivs $\sin^{n+1} x = \cos^{n+1}$ i formen $\sin x = \cos x$ ELLER granskning av det udda fallet med hjälp av tangens. | 1 |
| | Den ursprungliga ekvationens vänstra led är då positivt. Inga lösningar. | 1 |
| | Om $n+1$ är jämnt, omskrivs $\sin^{n+1} x = \cos^{n+1}$ i formen $\sin x = \pm \cos x$ ELLER motsvarande ekvation i situationen med tangens. | 1 |
| | En lösning fås endast i fallet $\sin x = -\cos x$ (ELLER tangensekvation), dvs. $x = \frac{3}{4}\pi$. | 1 |
| | Svaret i grader. | $-0$ |
| | Examinanden har löst en (icke-trivial) trigonometrisk ekvation med något program eller med en figur. | $+0$ |
| | I tangenslösningarna har man inte undersökt $\cos x = 0$ i deluppgifterna 11.2–11.3, sammanlagt | $-1$ |

| | | |
|---|---|---|
| **12.** | Derivatan $2t$ har beräknats, | 1 |
| | dvs. normalens riktningskoefficient är $-\frac{1}{2t}$. | 1 |
| | • (Normalens) ekvation $y - t^2 = k(x - t)$. | 1 |
| | Normalen skär $y$-axeln då $y - t^2 = \frac{1}{2t} \cdot t$, dvs. $k(t) = t^2 + \frac{1}{2}$ (då $t \neq 0$). | 1 |
| | Krökningsradien, dvs. avståndet från talet $K(0)$ till origo är $\lim_{t \to 0} k(t)$ | 1 |
| | • $(\lim_{t \to 0} k(t) = \lim_{t \to 0} t^2 + \frac{1}{2} = )\, 0^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ | 1 |
| | Gränsvärdet korrekt med eget $k(t)$ | max 2 |
| | Ekvationen för den uppritade normalen i punkten (1,1) är $y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1)$, dvs. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$. | 1 |
| | Cirkelns medelpunkt måste alltså ligga på den här linjen. | 1 |
| | Den till punkten $T(t)$ uppritade normalen skär den nämnda linjen då $-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = t^2 - \frac{x}{2t} + \frac{1}{2}$, | 1 |
| | dvs. $\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2t}\right) x = t^2 - 1$, av vilket $x = \frac{t^2 - 1}{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2t}} = -2t(t + 1)$, då $t \neq 1$, | 1 |
| | och $\lim_{t \to 1} -2t(t + 1) = -4$ samt $y = -\frac{1}{2}(-4) + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$. | 1 |
| | $\Rightarrow$ Parabelns krökningsradie, dvs. krökningsmedelpunktens avstånd till punkten (1,1) är $\sqrt{(-4 - 1)^2 + \left(\frac{7}{2} - 1\right)^2} = \sqrt{\frac{125}{4}} = \frac{5}{2}\sqrt{5}$. | 1 |
| | Typfel: Examinanden har beräknat skärningspunkten med $y$-axeln. Från första raden eller från resultatet $k(1) = \frac{3}{2}$ delas en poäng ut. | max 1 |
| | Startpoäng: En figur av situationen och krökningsradien $\frac{1}{2}$. (1+1) | max2 |
| **13.** | Figuren i stora drag korrekt. | 1 |
| | Koordinataxlarna finns med i figuren, skalan är utmärkt och punkterna är ungefärligt på sina rätta platser. | 1 |
| | Sträckorna fattas från figuren. | max 1 |
| | Algoritmen ger ett korrekt värde för till exempel arean av en enhetskvadrat ELLER arean av en rektangel. | 2 |
| | Algoritmen fungerar inte för en fyrhöring som har formen av en ”pilspets” ELLER Algoritmen fungerar inte korrekt för månghöningar som inte är konvexa, dvs. exempelvis för en sådan fyrhörning, vars hörn är $(1, -1)$, $(0, 0)$, $(-1, -1)$, och $(0, 1)$. | 2 |
| | I motexemplet en kort förklaring (lämpligt delad figur eller talvärden eller ickekonvexitet nämnts). | 1 |
| | Ett fungerande exempel betyder att varje val av hörn fungerar.<br>Enbart en figur räcker som exempel. | |
| | Idé om att instruktionerna inte är exakta (dvs. Alfs förslag är inte en algoritm), eftersom det inte har bestämts hur hörnen väljs/hur delningen i trianglar görs. Klart felaktiga förklaringar $-1$p/styck. | (2)<br>3 |