



MATEMATIKPROV, KORT LÄROKURS 24.9.2019 BESKRIVNING AV GODA SVAR

Grunderna enligt vilka bedömningen gjorts framkommer i de slutgiltiga beskrivningarna av goda svar. Uppgiften om hur bedömningsgrunderna tillämpats på examinandens provprestation utgörs av de poäng som examinanden fått för sin provprestation, de slutgiltiga beskrivningarna av goda svar och de föreskrifter gällande bedömningen som nämnden gett i sina föreskrifter och anvisningar. De slutgiltiga beskrivningarna av goda svar innehåller och beskriver inte nödvändigtvis alla godkända svarsalternativ eller alla godkända detaljer i ett godkänt svar. Eventuella bedömningsmarkeringar i provprestationerna anses vara jämfällbara med anteckningar och sålunda ger de, eller avsaknaden av markeringar, inte direkta uppgifter om hur bedömningsgrunderna tillämpats på provprestationen.

Av en god prestation framgår det hur examinanden har kommit fram till svaret. I lösningen måste det ingå nödvändiga uträkningar eller andra tillräckliga motiveringar och ett slutresultat. I bedömningen fästs uppmärksamhet vid helheten och vid de tre stegen start, mellansteg och slutresultat. Räknefel som inte väsentligt ändrar uppgiftens natur ger ingen betydande sänkning av antalet poäng. Räknefel och fel i den matematiska modellen som ändrar uppgiftens natur kan däremot sänka antalet poäng avsevärt.

I provet är räknaren ett hjälpmedel, och dess roll bedöms separat för varje uppgift. Om symbolräknare använts i en uppgift ska det framgå av prestationen. I lösningar av uppgifter som kräver analys räcker det inte enbart med ett svar som erhållits med hjälp av räknaren utan övriga motiveringar. Däremot räcker ett svar som examinanden fått med räknaren i allmänhet i rutinberäkningar. Detsamma gäller rutinmässiga delar av mera omfattande uppgifter. Exempel på sådana är omskrivning av uttryck, ekvationslösning samt derivering och integrering av funktioner.

Hur bedömningsanvisningarna ska tolkas

- De ställen där eximanden bör ha gjort korrekt sak för rätt objekt har markerats med **denna färg**. Då ska i det i lösningen ingå samma tal, uttryck eller motsvarande. Den här beteckningen har ingen inverkan på utformning och förenkling eller noggrannhet, utan för dem gäller samma regler som i övrigt. I övriga fall får man också poäng då man gör rätt sak korrekt, möjligen för ett felaktigt men rätt typ av objekt (exempelvis ett tidigare fel flyttas framåt).
- Uppdelade poäng i en rad är åtskiljda med /-tecknet. I oklara fall har specificerats från vilken del som man får vilka poäng.
- Det finns ingen specificering om det på raden finns lika många uträkningar som poäng - i så fall ges en poäng per uträkning.
- Om en rad består av en uträkning och en motivering i ord, så härrör hälften av poängen från uträkningen (avrundande uppåt) och resten från motiveringarna.
- Om det på en rad endast finns en uträkning eller en formel och flera poäng, så får man delpoäng för ett tillräckligt bra försök (till exempel beräkning av derivatan delvis rätt).
- En uträkning eller motivering i parentes på en rad är tilläggsinformation som inte behövs för att ge poäng.

Följande avdrag är av sekundär betydelse för den uppgiftsspecifika poänganvisningen. På ett ställe kan man tillämpa flera avdrag, men man kan inte förlora intjänade poäng.

- Svaret korrekt, men inte i den efterfrågade formen (t.ex. noggrannhet, enhet) -1 p.
- Svaret är inte förenklat till slut i en förenklingsuppgift (t.ex. e^1 , $\ln(e)$ eller 4^0) -2 p.
- Svaret är oförenklat i en annan uppgift (t.ex. e^1 , $\ln(e)$ eller 4^0) -1 p.
- Uppenbara inmatningsfel i framställningen (t.ex. $x = 2, y04$), eller inmatningsfel som korrigeras genast på följande rad -0 p.
- Kopieringsfel i svaret -1 p.
- Inga flera gällande siffror i en mellanavrundning än i svaret -1 p.

Följande avdrag är av sekundär betydelse för den uppgiftsspecifika poänganvisningen. På ett ställe kan man tillämpa flera avdrag, man vardera avdrag högst en gång.

- Matematiskt bristfällig beteckning (t.ex. parenteser som fattas men korrekt beräknat; =-tecknet använt "i kedja", m^2 utan m). Obs! Beroende på situationen så kan en ostandardiserad beteckning godkännas som förklarad. -1 p.
- I lösningen saknas väsentliga förklaringar (läsarens måste gissa vad talen i lösningen betyder) ELLER motiveringarna och slutledningarna är framställda helt lösryckta (läsaren måste kombinera uttryck från olika delar av lösningen) -1 p.
- Överflödigt text eller överflödiga beräkningar i betydande grad i en lösning (läsaren måste dra slutsatser om hur lösningen utformas utifrån den givna informationen) -1 p.

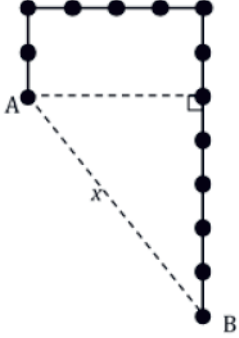
Uppgiftsspecifika anvisningar

Del A

1.	a_n - geometrisk	2
	b_n - varkendera	2
	c_n - geometrisk	2
	d_n - både och	2
	e_n - varkendera	2
	f_n - aritmetisk	2
2.	Svar i deluppgift 2.1: $a^2 + b^2 = c^2$	1
	Svar i deluppgift 2.2: 8	1
	Klart för långt (innehåller uträkningar/text)	0
	Svar i deluppgift 2.3: $\tan \alpha = \frac{a}{b}$ ELLER $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$	1
	Svar i deluppgift 2.4: 45	1
	Svar i deluppgift 2.5: $\tan \alpha = \frac{a}{b}$	1
	Svar i deluppgift 2.6: 56	1
	Inte med en grads noggrannhet	0
	Svar i deluppgift 2.7: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$	1
	Svar i deluppgift 2.8: 30	1
	Svar i deluppgift 2.9: $\sin \alpha = \frac{a}{c}$	1
	Svar i deluppgift 2.10: 10	1
	Svar i deluppgift 2.11: $\cos \alpha = \frac{b}{c}$	1
	Svar i deluppgift 2.12: 54	1
	Inte med en grads noggrannhet	0
	Enhet	-0
	Den här gången gjordes poängavdrag för en överlång lösning undantagsvis endast i deluppgift 2.2.	
3.	$y = x + 3$ / motiveringar (riktningskoefficient+punkt eller 2 punkter).	2+1
	Om det in föregående rad fattas $y =$, x -koefficient eller konstanten är fel, så för varje	-1
	Genom insättning i parabelns ekvation ($y = 4x^2$) ELLER ekvationspar $\{y = x + 3, y = 4x^2\} / x + 3 = 4x^2$.	1+1
	Examinanden löser $4x^2 - x - 3 = 0$:	1
	$x = \frac{1}{2 \cdot 4}(1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 4 \cdot (-3)})$ / och väljer minustecknet / $x = -\frac{3}{4}$	(2+1)+1
	$y = \frac{9}{4}$ / skärningspunkten är $(-\frac{3}{4}, \frac{9}{4})$ ELLER $(-0,75; 2,25)$	1+1
Svaret oförenklat.	-1	

4.	<p>Examinanden har i Almas fall beräknat att det blir 319 ELLER ett annat exempel för en person som är yngre än 100 år.</p>	(2)
	<ul style="list-style-type: none"> • Examinanden har beräknat ett exempel för en person som är över 100 år. 	(2)
	<p>En slutsats i ord (att resultatet är i formen $100x + y$) och därmed endast fungerar för personer som är yngre än 100 år.</p>	2
	<ul style="list-style-type: none"> • Examinanden har i exempel eller algebraiskt separat undersökt fall där födelsedagen redan har infallit och där födelsedagen är på kommande. 	1
	<p><i>Algebraisk motivering</i></p>	
	<p>Vi betecknar det ursprungliga valda talet med variabeln x och personens ålder med variabeln y. Vi bildar ett algebraiskt uttryck enligt instruktionerna för de olika stegen:</p>	
	(b) $2x$	(1)
	(c) $2x + 5$	(1)
	(d) $100x + 250$	1
	(e) $100x + 2018 + j$, där j är 0 (fall ii) eller 1 (fall i).	1
	<p>Födelseåret beror på åldern y och på om födelsedagen redan infallit det här året. Födelseåret är $2018 - y + j$. Granskningen av fallen i och ii kan även göras utan ”j”-variabeln.</p>	1
	(f) $100x + y$ (häriifrån fortsätter den ovan nämnda motiveringen i ord)	
	<p>Algebraisk slutledning utan granskning om födelsedagen infallit eller om den är på kommande.</p>	max 10
	<p>Om examinanden har beräknat resultaten (a)–(d) genom att välja alla talen i intervallet och får $(350, 450, \dots, 1150)$, av dessa fall (Obs! Det kan också vara fråga om en del av en fullständig lösning, vilket i så fall ger fulla poäng.)</p>	1

Del B1

5.	<p>Halveringstiden T anger hur lång tid det tar tills hälften av ackumulatorns ursprungliga laddning återstår ELLER 50C ELLER $\frac{1}{2}a$</p> <p>Vi får denna ur formeln $a \cdot q^T = \frac{1}{2}a$.</p> <p>$(0,877)^T = 0,5$ ELLER $100(0,877)^T = 50$</p> <p>$T = 5,28119 \dots$</p> <p>$\approx 5,3$ (timmar) (eller 5 timmar och 17 minuter).</p> <p>$100(0,877)^T = 0,5$ från formeln och dess lösning.</p> <p>$(0,88)^T = 0,5$ ELLER $(0,8777)^T = 0,5$</p> <p>Användning av formeln $aq^T = \frac{1}{2}aq$, utan att man från T slutligen dragit bort 1. De första 2+2 poängen och de sista 2 p kan man få med hjälp av en graf (grafan $y = aq^T$ kan ersätta ekvationen).</p> <p>Tabellösning (endast med heltal, slutar med talet 5).</p> <p>Tabellösning (endast med heltal, 5 och 6 med).</p> <p>Tabellösning (noggrant motiverat, dvs. här ingår åtminstone punkterna 4,5 och 5,5 samt monotonitet).</p>	<p>(2)</p> <p>(2)</p> <p>4</p> <p>(2)</p> <p>2</p> <p>0</p> <p>max 10</p> <p>max 8</p> <p>max 4</p> <p>max 6</p> <p>max 12</p>
6.	<p>Figur, till exempel</p>  <p>Bruten sträcka som består av tre sträckor (inte alla på samma linje).</p> <ul style="list-style-type: none"> • Punkterna A och B korrekt betecknade. <p>Varje vändning åt höger, som ungefärligen ser ut att vara 90 grader.</p> <p>Den första och den tredje sträckan är parallella.</p> <p>Krokform.</p> <p>Sträckorna är av rätt längd ELLER ungefärligen av rätt längd, och längderna är givna som tal.</p> <p>Kompletterad rätvinklig triangel eller förklarat motsvarande i ord.</p> <p>Examinanden fått fram kateternas längder 4 och 5.</p> <p>Talen insatta i Pythagoras sats.</p> <p>$\sqrt{25 + 16} = 6,403 \dots \approx 6,4$ (m).</p> <p>ELLER</p> <p>Examinanden har gett (också felaktiga) koordinater för punkterna A och B. koordinaterna för punkterna A och B är synliga, x- och y-differenserna korrekta (inte nödvändigtvis synliga).</p> <p>beräkningar (ELLER det använda kommandot syns) och resultatet 6,4.</p> <p>Punkterna i deluppgift 6.1. felaktiga (uppgiftens karaktär ändras inte).</p> <p>Endast svar.</p>	<p>1</p> <p>1</p> <p>1</p> <p>1</p> <p>1</p> <p>1</p> <p>1</p> <p>1</p> <p>1+1</p> <p>1</p> <p>1+1</p> <p>1</p> <p>1+1</p> <p>2+1</p> <p>max 4</p> <p>0</p>

7.	B-aktiens pris 3e/efter korrekt förmedlingsavgift (996e)/332 B-aktier.	3
	B-aktiens pris 2,5e/efter korrekt förmedlingsavgift (822e)/ C:s pris 6e/ dvs. 137 C-aktier.	4
	C-aktiens pris 7e/efter korrekt förmedlingsavgift (951e)/ A:s pris 3e dvs. 317 A-aktier.	3
	A-aktiens pris 2,8e/efter korrekt förmedlingsavgift 883,60 euro.	2
	Man kan få max 3 p. för aktiernas priser om det inte ur lösningen också framgår hur priset påverkar antalet. Detta tillämpas om det i lösningen exempelvis endast finns en tabell av priser, eller om antalet är beräknat med modellen $3 \cdot 996 = 2988$ B-aktier eller motsvarande.	
	Förmedlingsavgiften fattas/alla förmedlingsavgifter avdragits i slutet.	max 8
	Förmedlingsavgiften 4e vid varje tidpunkt.	max 9
	Startkapital 1004.	max 12
8.	• Sambandet mellan riktningskoefficienten och derivatan framgår.	1
	$p'(x) = 3x^2 + 5$ / dvs. $p'(1) = 8$.	2+2
	• Ekvationen för tangenten som går genom punkten (1, 6) är $y - 6 = k(x - 1)$.	4
	Insättning av värdet av $p'(1)$ på k :s plats.	2
	$y = 8x - 2$.	1
	1 och 6 omkastade.	max 9
	Om $y = 8x - 2$ dyker upp utan koppling till derivatan så bildas poängen enbart från derivataraden (och speciellt endast svar ger 0 p).	max 4
9.1.	$\overline{AE} = \overline{b} + \frac{1}{2}\overline{a}$,	4
	eftersom $DC = AB$ och $AE = AD + \frac{1}{2}DC$ ELLER en annan motivering, till exempel parallelogram.	(2)+2
	$\overline{BD} = \overline{b} - \overline{a}$,	4
9.2.	Väntevärdet för ett tärningskast är $\frac{13}{2}$.	3
	Summans väntevärde är därmed $2 \cdot \frac{13}{2} = 13$.	3
	Variansen för ett tärningskast $\frac{143}{12}$	2
	och variansen $2 \cdot \frac{143}{12} = \frac{143}{6}$, från vilket vi får standardavvikelsen $\sqrt{143/6} \approx 4,88193\dots$	2+2
	ELLER	
	12 × 12 tabell	4
	Väntevärde 13 och en utredning om med vilket kommando/vilken metod som man fått detta värde.	2+2
	Standardavvikelsen 4,88193... och en utredning om med vilket kommando/vilken metod som man fått detta.	2+2
Standardavvikelse för stickprov ($\approx 4,899$).	max 12	
	12 × 12 = 144 (utfall).	1

Del B2

10.	<p>Eftersom alla familjemedlemmar åldras är medelåldern som lägst då Mats och Maj gifter sig eller direkt efter att ett barn blivit fött. Åldrarna då de gifter sig: 23 och 21. (Medelvärde: 22) Något medelvärde korrekt beräknat. Åldrarna då första barnet föds: 25, 23 och 0. Medelvärde: 16 Åldrarna då andra barnet föds: 29, 27, 4 och 0. Medelvärde: 15 Åldrarna då tredje barnet föds: 33, 31, 8, 4 och 0. Medelvärde: 15,2 Åldrarna då fjärde barnet föds: 37, 35, 12, 8, 4 och 0. Medelvärde: 16 Medelåldern är alltså som lägst 15 år, då det andra barnet föds. De två första poängen kräver ett utskrivet resonemang, eller så framgår detta av att endast de ovanstående åldrarna beräknats. Tabellösning med alla heltalsvärden utan att examinanden nämner att medelvärdet bara växer efter det fjärde barnet. Endast korrekta medelvärden och rätt svar. Typfel: medelvärdena beräknade med $n - 1$ som divisor då ett tal är 0 \Rightarrow 4 medelvärden felaktiga. Typfel: barnen föds som 1-åringar \Rightarrow 4 uträkningar fel.</p>	<p>2</p> <p>1</p> <p>1</p> <p>1</p> <p>1</p> <p>1</p> <p>1</p> <p>1</p> <p>1</p> <p>1</p> <p>1</p> <p>max 10</p> <p>2</p> <p>max 8</p> <p>max 8</p>
11.	<p>$x_2 = \frac{1}{2}(3 + \frac{5}{3}) = \frac{7}{3} = 2,333\dots$ $x_2/\sqrt{5} = 1,043498389499\dots$ dvs. Ivars resultat är 4,3 procent för stort. $x_3 = \frac{47}{21} = 2,238095\dots$ $x_4 = \frac{2207}{987} = 2,236068\dots$ $x_4/\sqrt{5} = 1,000000410606\dots$ dvs. Simons resultat är 0,000041 procent för stort. • De i det föregående nämnda operationerna är utförda med tillräcklig noggrannhet och svaret ligger i intervallet 0,000001–0,0001 procent. Man kan få noggrannhetspoängen fastän jämförelsen skulle vara felsvängd. Om x_n är fel (t.ex. $x_n = n$), kan man ändå få poäng för en korrekt gjord jämförelse $x_2/\sqrt{5}$ och $x_4/\sqrt{5}$. Det räcker om x_n är uttryckt endera som bråktal eller decimaltal, båda krävs inte.</p>	<p>2</p> <p>1+1</p> <p>1</p> <p>1</p> <p>1</p> <p>1</p> <p>1+1</p> <p>2</p> <p>1</p> <p>max 2</p>

12.	Volymen av en marmeladbit är direkt proportionell mot kvadraten på radien.	1
	Då radien halveras minskar volymen till en fjärdedel av den ursprungliga volymen.	2
	Man får i sig lika mycket marmelad genom att äta en fyra gånger så stort mängd, dvs. 12 små bitar.	1
	ELLER	
	Den lilla bitens radie är r och volym $\pi r^2 h$	1
	Den stora bitens radie är $2r$ och volym $4\pi r^2 h$	2
	$3 \cdot 4\pi r^2 h / (\pi r^2 h) = 12$	1
	Examinanden har använt konkreta talvärden (r , h eller båda)	-1
	Potatisens volym är direkt proportionell mot kuben på diametern (diametern i tredje potens).	1
	Då diametern är 0,6-faldig minskar volymen till en $(0,6)^3$ -del av den ursprungliga volymen.	3
Man får i sig lika mycket potatis genom att äta cirka 9 och en fjärdedel små potatisar ELLER 9 ELLER 10.	2	
Använt en viss form (och radie), t.ex. ett klot.	max 4	
Den tid det tar att framföra musikstycket är inte beroende av körens storlek (tiden är proportionell mot körens storlek i nollte potens).	1	
Det tar därmed cirka 7 minuter och 40 sekunder.	1	
ELLER		
En annan vettig motivering, som även kan leda till en annan längd på framförandet.	max 2	
Typfel: direkt proportionalitet (om inga övriga förtjänster).	0	
13.	Vi får antalet 15–64-åringar genom att multiplicera folkmängden med motsvarande procentuella andel (bilaga, rad 9).	2
	Man kan göra anpassningen till exempel med hjälp av ett kalkyprogram (bilaga):	
	Den linjära modellen är $y = 17,33x - 31\,290$ (tusen personer).	2
	Andragsgradsmodellen är $y = -0,06702x^2 + 279,3x - 288\,200$ (tusen personer).	3
	Genom användning av den linjära modellen är prognoserna för åren 2035 och 2350 3 988 000 och 9 449 000.	1
	Genom användning av andragsgradsmodellen är prognoserna för åren 2035 och 2350 3 730 000 och -699 900.	1
	Båda modellernas prognoser för år 2035 verkar meningsfulla ELLER vettig förklaring på varför den ena modellen är bättre år 2035.	1
	Den linjära modellens prognos för år 2350 verkar stor ELLER möjlig.	1
	Andragsgradsmodellens prognos för år 2350 är orimlig, eftersom folkmängden inte kan vara negativ.	1
	https://www.ylioppilastutkinto.fi/images/sivuston_tiedostot/Hyv_vast_piirt/SV_2019_H/n13_sv.ods	
Enheten (tusen personer) fattas. Den första raden kan då ge max 1 p., och de sistnämnda 5 raderna kan ge max. 4 p.	max 10	
Om modellen är anpassad lite fel, -1 p. per modell.		
Om modellen syns endast i en bild utan uttryck, -1 p. per modell.		