MATEMATIKPROV, LÅNG LÄROKURS 24.9.2019
BESKRIVNING AV GODA SVAR

Grunderna enligt vilka bedömningen gjorts framkommer i de slutgiltiga beskrivningarna av goda svar. Uppgiften om hur bedömningsgrunderna tillämpats på examinandens provprestation utgörs av de poäng som examinanden fått för sin provprestation, de slutgiltiga beskrivningarna av goda svar och de föreskrifter gällande bedömningen som nämnden gett i sina föreskrifter och anvisningar. De slutgiltiga beskrivningarna av goda svar innehåller och beskriver inte nödvändigtvis alla godkända svarsalternativ eller alla godkända detaljer i ett godkänt svar. Eventuella bedömningsmarkeringar i provprestationerna anses vara jämställbara med anteckningar och sålunda ger de, eller avsaknaden av markeringar, inte direkta uppgifter om hur bedömningsgrunderna tillämpats på provprestationen.

Av en god prestation framgår det hur examinanden har kommit fram till svaret. I lösningen måste det ingå nödvändiga uträkningar eller andra tillräckliga motiveringar och ett slutresultat. I bedömningen fästs uppmärksamhet vid helheten och vid de tre stegen start, mellansteg och slutresultat. Räknefel som inte väsentligt ändrar uppgiftens natur ger ingen betydande sänkning av antalet poäng. Räknefel och fel i den matematiska modellen som ändrar uppgiftens natur kan däremot sänka antalet poäng avsevärt.

I provet är räknaren ett hjälpmedel, och dess roll bedöms separat för varje uppgift. Om symbolräknare använts i en uppgift ska det framgå av prestationen. I lösningar av uppgifter som kräver analys räcker det inte enbart med ett svar som erhållits med hjälp av räknaren utan övriga motiveringar. Däremot räcker ett svar som examinanden fått med räknaren i allmänhet i rutinberäkningar. Detsamma gäller rutinmässiga delar av mera omfattande uppgifter. Exempel på sådana är omskrivning av uttryck, ekvationslösning samt derivering och integrering av funktioner.

Tryckfelet i uppgift 1.1. är korrigerat 29.11.2019. Talvärdet 490 000 har ersatts med värdet 210 000. Bedömningen har gjorts utifrån det korrekta värdet.

Hur bedömningsanvisningarna ska tolkas

- De ställen där eximanden bör ha gjort korrekt sak för rätt objekt har markerats med denna färg. Då ska i det i lösningen ingå samma tal, uttryck eller motsvarande så när som på den ekvivalenta utformningen. I övriga fall får man också poäng då man gör rätt sak korrekt, möjligen för ett felaktigt men rätt typ av objekt (exempelvis ett tidigare fel flyttas framåt).
- Beteckningen $\triangledown$ i början av en rad betyder att radens poäng kan ges oberoende av de tidigare raderna; de följande raderna förutsätter denna rad på normalt sätt.
- beteckningen $\odot$ i början av en rad betyder att radens poäng kan ges oberoende av de tidigare raderna; de följande raderna förutsätter inte denna rad.
- Uppdelade poäng i en rad är åtskiljda med $/$-tecknet. I oklara fall har specificerats från vilken del som man får vilka poäng.
- Det finns ingen specificering om det på raden finns lika många uträkningar som poäng - i så fall ges en poäng per uträkning.
- Om en rad består av en uträkning och en motivering i ord, så härrör hälften av poängen från uträkningen (avrundande uppåt) och resten från motiveringarna.
- Om det på en rad endast finns en uträkning eller en formel och flera poäng, så får man delpoäng för ett tillräckligt bra försök (till exempel beräkning av derivatan delvis rätt).
- En uträkning eller motivering i parentes på en rad är tilläggsinformation som inte behövs för att ge poäng.

Följande avdrag är av sekundär betydelse för den uppgiftsspecifika poänganvisningen. På ett ställe kan man tillämpa flera avdrag, men man kan inte förlora intjänade poäng.

- Svaret korrekt, men inte i den efterfrågade formen (t.ex. noggrannhet, enhet) -1 p.
- Svaret är inte förenklat till slut i en förenklingsuppgift (t.ex. e^1, $\ln(e)$ eller 4^0) -2 p.
- Svaret är oförenklat i en annan uppgift (t.ex. e^1, $\ln(e)$ eller 4^0) -1 p.
- Uppenbara inmatningsfel i framställningen (t.ex. $x = 2$, $y04$), eller inmatningsfel som korrigeras genast på följande rad -0 p.
- Kopieringsfel i svaret -1 p.
- Inga flera gällande siffror i en mellanavrundning än i svaret -1 p.

Följande avdrag är av sekundär betydelse för den uppgiftsspecifika poänganvisningen. På ett ställe kan man tillämpa flera avdrag, man vardera avdrag högst en gång.

- Matematiskt bristfällig beteckning (t.ex. parenteser som fattas men korrekt beräknat; $=$-tecknet använt “i kedja”, m^2 utan m). Obs! Beroende på situationen så kan en ostandardiserad beteckning godkännas som förklarad. -1 p.
- I lösningen saknas väsentliga förklaringar (läsarens måste gissa vad talen i lösningen betyder) ELLER motiveringarna och slutledningarna är framställda helt lösryckta (läsaren måste kombinera uttryck från olika delar av lösningen) -1 p.
- Överflödig text eller överflödiga beräkningar i betydande grad i en lösning (läsaren måste dra slutsatser om hur lösningen utformas utifrån den givna informationen) -1 p.

Uppgiftsspecifika anvisningar

Del A

1.

210000	4
Poäng bestäms endast på basis av svaret	
210000^2 ("spökenhet" utan meter)	-1
Hälften eller det dubbla	-2
Felaktigt antal nollor	-1/nolla
Enhet	-0
1250	4
Kvadratroten bortlämnad, dvs. 1 562 500	-2
336/336,0/340	4
Hälften eller det dubbla	3
"≈ 336"	3
Svaret i mängden $[335, 337] \setminus \{336\}$	2
Svaret överstiger maximilängden 10 tecken (innehåller beräkningar/text).	-1

2.

4	3
$4 + 0$	2
$4 + c$	1
Korrekt $=$-kedja, under 20 tecken	-0
Flera uttryck	-1
$\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3$	3
Koefficienterna (1/4 och 1/3) korrekta	$1 + 1$
Exponenterna (4 och 3) korrekta	1
$14(2x - 1)^6$	3
Koefficient 7	1
Parentesuttryckets exponent 6	1
Inre funktionens derivata 2	1
$-4\cos(3x)$	3
Koefficientens tecken fel	-1
Koefficientens absolutbelopp fel	-1
$-\cos(x)$	1
Lång motiverieng eller oklart vad som utgör svaret.	-1

3.

Vi betecknar $\overline{u} = (x, y)$.	1
Det första villkoret ger $3x + 4y = 15$.	1
Det andra villkoret ger $x^2 + y^2 = 25$.	1
Med stöd av det första villkoret är $x = 5 - \frac{4}{3}y$ ELLER $y = \frac{15}{4} - \frac{3}{4}x$.	1
Substituering av detta i det andra villkoret: $(5 - \frac{4}{3}y)^2 + y^2 = 25$ ELLER $x^2 + (\frac{15}{4} - \frac{3}{4}x)^2 = 25$.	1
Kvadrering av parentesen: $25 - \frac{40}{3}y + \frac{16}{9}y^2 + y^2 = 25$.	1
Förenkling: $-\frac{40}{3}y + \frac{25}{9}y^2 = 0$.	1
$y = 0$ eller $y = \frac{40}{3} \cdot \frac{9}{25} = \frac{24}{5}$.	2
Av det första villkoret får vi $x = 5$ eller $x = -\frac{7}{5}$.	2
$\overline{u} = (5{,}0)$ eller $\overline{u} = (-\frac{7}{5}, \frac{24}{5})$.	1
Examinanden blandar ihop skalär och vektor i beteckningarna, men uträkningen fortsätter korrekt: poängförluster i de tre första raderna.	
Uppgiften kan även lösas med vektorer eller med trigonometri.	
Oförkortade bråk i svaret.	-0
Gissning + testning (för var och en av lösningarna).	1+1

4.

$-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ och båda extremvärdena antas.	1+1
▽ Det minsta värdet är e^{-1} och det största värdet är e,	1+1
eftersom exponentialfunktionen är växande.	2
ELLER	
derivatan $\cos x\, e^{\sin x}$	1
derivatans nollställen $\pm\frac{\pi}{2} + 2\pi k$	1
examinanden har beräknat den ursprungliga funktionens värden i derivatans nollställen	1
examinanden har valt period utifrån funktionens periodicitet och beräknat värden i intervallets ändpunkter ELLER konstaterat funktionens periodicitet	1
▽ Det minsta värdet är e^{-1} och det största värdet är e.	1+1
$\sin x + \cos x \geqslant 1$,	1
eftersom olikheten förenklas till formen $e^{\sin x + \cos x} \geqslant e$,	1
eftersom man kan logaritmera olikheten ledvis (logaritmfunktionen är växande).	1
I intervallet $[0, \frac{\pi}{2}]$ är $\sin x \geqslant \sin^2 x$ och $\cos x \geqslant \cos^2 x$ ELLER mimimi för funktionen $\sin x + \cos x$ är med stöd av derivatan i ändpunkterna och värdet i dem är 1	2
dvs. vi har $\sin x + \cos x \geqslant \sin^2 x + \cos^2 x = 1$, dvs. olikheten gäller.	1
ELLER	
Vi löser ekvationen $\sin x + \cos x = 1$,	1
eftersom man kan logaritmera ekvationen ledvis (logaritmen en bijektion).	1
I intervallet $[0, \frac{\pi}{2}]$ är $\sin x + \cos x = \sqrt{1 - \cos^2 x} + \cos x = 1$, vars lösningar är $x = 0$ och $x = \frac{\pi}{2}$.	2
Med teckenschema eller motsvarande kan man konstatera att $\sin x + \cos x \geqslant 1$ dvs. olikheten $e^{\sin x} \geqslant e^{1 - \cos x}$ gäller.	1
Examinanden har motiverat olikhetens riktning med att logaritmen är en växande funktion.	1

Del B1

5.	$[-3{,}1]$ och $[4,\infty[$	3+3
	Ändpunkterna felaktiga	2+2
	Ekvationens lösningar $x=-3$, $x=1$ och $x=4$	1
	För varje faktor tar man reda på i vilket intervall den är negativ.	2
	$x<a$, $x<b$ och $x<c$	2
	För varje delintervall tar man reda på hur många faktorer som är negativa (exempelvis med teckenchema).	1
	Om de negativa faktorerna är udda till antalet så är produkten negativ, annars icke-negativ.	1
	ELLER	
	Nollregeln för en produkt är nämnd (eller motsvarande) / som ger funktionens nollställen a, b och c.	1+2
	$p(x) \geqslant 0$ löses med testpunkter ELLER med teckenschema ELLER genom att använda egenskaperna hos ett polynom av 3. graden.	1
	Utredning hur man går tillväga i föregående moment.	2
	Examinanden har behandlat ett fall, där a, b och c är konkreta tal.	max 4
	Examinanden har använt konkreta tal a, b och c som exempel, men förklaringen i ord är allmän.	max 6
	Endast en figur där funktionsgrafens förlopp är skisserad.	max 4

6.	Ungefärligen rätt bild av situationen ELLER en konstruktion i rätt riktning.	4
	$\bigtriangledown$ parablernas ekvationer i formen $y=ax^2+bx+c$ ELLER $f(x)=ax^2+bx+c$ med konkreta tal a, b och c.	1+1
	Ekvation ELLER ekvationspar.	2
	Lösning.	1
	Derivatorna är beräknade och examinanden har konstaterat att värdena är lika i tangeringspunkterna ELLER tangeringen motsvarar ett fall med en skärningspunkt, därför att parablerna öppnas åt olika håll.	2
	Examinanden konstaterat att tangeringspunkten inte är toppen.	1
	ELLER	
	Vi kan till exempel söka efter parabler som tangerar linjen $y=x$ i origo.	1
	Tangenten till parabeln $y=ax^2+bx+c$ i origo får vi med hjälp av derivatan:	2
	$2ax+b=b$ då $x=0$.	3
	Vi får alltså villkoret $b=1$.	2
	Dessutom måste parabeln gå genom origo: $0=a0^2+b0+c$ dvs. $c=0$.	2
	Som exempel fungerar därmed bland annat x^2+x och $-x^2+x$.	2
	ELLER	
	Vi granskar till exempel parablerna $y=x^2$ och $y=-(x-1)^2+c$.	2
	För olika värden på parametern c har parablerna noll, en eller två skärningspunkter.	2
	Tangering motsvarar fallet med en skärningspunkt, därför att parablerna öppnas åt olika håll,	2
	dvs. ekvationen $x^2=-(x-1)^2+c$ borde ha exakt en lösning	2
	dvs. diskriminanten $(-2)^2-4\cdot 2\cdot(1-c)=0$.	2
	Därmed duger exempelvis $y=x^2$ och $y=-x^2+2x-\frac{1}{2}$.	2
	Tangering i topparna (till exempel $y=x^2$ och $y=-x^2$).	max 2

7.

Examinanden undersöker antalet lösningar: diskriminant, rotformeln, SOLVE, graf.	2
Antalet lösningar är 1 om $n = 4$ (ELLER 2 i fallet $n > 4$).	2
Antalet gynnsamma fall är ett för vardera tärningen.	2
Sannolikheten för ett dubbelt nollställe med den ena tärningen är därmed $\frac{1}{6}$ och med den andra tärningen $\frac{1}{8}$ (ELLER $\frac{1}{3}$ och $\frac{1}{2}$)	2
$\frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8}$ (ELLER $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$)	3
$= \frac{13}{48}$ (ELLER $\frac{2}{3}$).	1
https://www.ylioppilastutkinto.fi/images/sivuston_tiedostot/Hyv_vast_piirt/SV_2019_H/m7.ods	
Examinanden har missförstått ”dubbelt nollställe”; poängen 2+2+0+2+3+1.	max 10
Om det nästsista steget endast utgörs av $\frac{1}{6} + \frac{1}{8}$ ELLER $\frac{1}{3} + \frac{1}{2}$; poäng 2+2+2+2+1+0.	max 9
I lösningen kan också decimaltal och procenter användas.	

8.

Ett tal är delbart med talet nio om och endast om summan av talets siffror är delbar med nio. Siffersummorna av talen 111 111 111, 222 222 222 och 333 333 333 är 9, 18 och 27, dvs. varje tal är delbart med nio. (Man kan också beräkna direkt med räknaren.)	3
Om talet n är delbart med nio så är också talet n^k delbart med nio då k är ett positivt heltal ELLER $111\,111\,111^{111\,111\,111} = 111\,111\,111 \cdot n$, där n är ett heltal.	3
Därmed är talet $111\,111\,111^{111\,111\,111}$ delbart med talet nio, och detsamma gäller de övriga termerna.	1+2
$\triangledown$ Därmed är även summan delbar med talet nio.	3
Endast svar	0

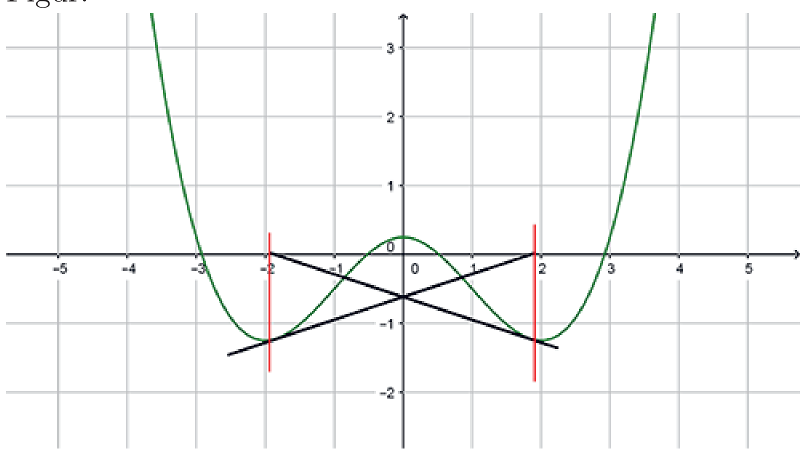
9.	Då $x < 0$ är funktionen $f(x) = \frac{x}{1-x} = -1 + \frac{1}{1-x}$ växande, eftersom $1 - x$ är avtagande.	1
	Då $x \geqslant 0$ är funktionen $f(x) = \frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$ växande, eftersom $1+x$ är växande.	1
	$\odot$ Funktionen är kontinuerlig i origo, dvs. den är växande på hela reella talaxeln.	1
	Beräkning av gränsvärdena: $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$ och $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$ (korrekta värden)	1
	Som värdemängd får vi ett intervall vars ändpunkter är -1 och 1, (eftersom f är kontinuerlig).	1
	Intervallet är öppet eftersom f är strängt växande.	1
	De två första stegen kan lösas genom att använda derivatan $f'(x) = (1 + \|x\|)^{-2}$ (exempelvis med räknare); origogranskning krävs separat.	
	$x = \frac{z}{1-z}$ ELLER $f^{-1}(z) = \frac{z}{1-z}$.	1
	I fallet $x \geqslant 0$ löser man ekvationen $z = \frac{x}{1+x}$	1
	$f^{-1}(z) = \frac{z}{1-z}$ då $z \in [0,1[$.	1
	$x = \frac{z}{1+z}$ eller $f^{-1}(z) = \frac{z}{1+z}$	1
	I fallet $x < 0$ löser man ekvationen. $z = \frac{x}{1-x}$	1
	$f^{-1}(z) = \frac{z}{1+z}$ då $z \in (-1,0]$.	1
	Det här kan kortare skrivas $f^{-1}(z) = \frac{z}{1-\|z\|}$, $z \in]-1,1[$.	
	ELLER	
	Eftersom $B \subsetneq \mathbb{R}$ är f inte en bijektion. Därmed existerar inte inversa funktionen.	6
	ELLER	
	Räknarlösning: $f^{-1}(z) = \frac{z}{1-\|z\|}$ / $z \in]-1,1[$ / samt examinandens utredning av hur detta erhållits.	2+2+2

Del B2

10.

Svar: Sex studsar	4
Motiveringar	
Figur där $y = 1$ eller rutsystem där en linje dragits vid 1.	2
Förklaring på sambandet mellan figuren och svaret.	2
Inga överskridningar utanför figuren, eftersom studsarna minskar ELLER sinus är begränsad och nämnaren är stor.	2
Den sjunde studsen är under en meter (inzoomad figur eller beräkning).	2
ELLER (Motiveringar)	
Examinanden har hittat närmevärden för alla lösningar till ekvationen $h(x) = 1$ (exempelvis SOLVE).	(2)
Examinanden har hittat närmevärdena för 12 positiva lösningar.	2
Förklaring på vilket sambandet mellan ekvationens lösningar och svaret är.	2
Dessa utgör alla lösningar, eftersom studsarna minskar ELLER sinus är begränsad och nämnaren är stor.	2
ELLER (Motiveringar)	
Examinaden har beräknat derivatan $h'(x)$.	(2)
Examinanden har hittat åtminstonen det sjätte (17,2338) och det sjunde (20,381) positiva nollstället till derivatan.	2
Examinanden har beräknat funktionens värde (1,12328 och 0,984226) i de nämnda nollställena och jämfört med ett.	2
Dessa utgör alla lösningar, eftersom studsarna minskar ELLER sinus är begränsad och nämnaren är stor.	2

11.

Figur: 	
Newtons metod kan tolkas grafiskt på följande sätt: I punkten $(x_n, f(x_n))$ ser vi var tangenten till kurvan $y = f(x)$ skär x-axeln. Skärningspunktens x-koordinat ger värdet x_{n+1}.	3
Figur där situationen i det föregående framgår (tangent och projektion).	2
För att vi ska komma fram till den situation som beskrivs i uppgiften måste tangenten till kurvan i punkten x_n träffa x-axeln i punkten x_{n+1} och tangenten till kurvan i punkten x_{n+1} träffa x-axeln i punkten x_n.	3
Figur med två tangenter och två projektioner till axlarna i det 2-periodiska fallet.	2
Närmevärden från den egna korrekta figuren med 0,1 eller 0,05 noggrannhet (observera noggrannheten, det borde vara ca $-1{,}8$ och 1,8 ELLER $-1{,}7$ och $-0{,}3$ ELLER 0,3 och 1,7)	2

12.

Vi betecknar $f(x) = x^6$.	1
Då $x \in [k-1, k]$ är $(k-1)^6 \leqslant f(x) \leqslant k^6$.	2
Vi integrerar ledvis ovanstående olikhet och observerar att integralen av en konstant (funktion) över ett en enhet långt intervall är konstanten själv: $(k-1)^6 \leqslant \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \leqslant k^6$.	3
Vi tar ledvis summan av den vänstra olikheten då $k = n+1, \ldots, 2n$, och den högra olikheten då $k = n, \ldots, 2n-1$: $\sum_{k=n+1}^{2n}(k-1)^6 \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n}\int_{k-1}^{k} f(x)\,dx = \int_{n}^{2n} f(x)\,dx = [\frac{1}{7}x^7]_{n}^{2n} = \frac{127}{7}n^7$ och $\sum_{k=n}^{2n-1} k^6 \geqslant \sum_{k=n}^{2n-1}\int_{k-1}^{k} f(x)\,dx = \int_{n-1}^{2n-1} f(x)\,dx = [\frac{1}{7}x^7]_{n-1}^{2n-1} \geqslant \frac{127}{7}(n-1)^7$.	4
Med variabelbyte ser vi att $\sum_{k=n+1}^{2n}(k-1)^6 = \sum_{k=n}^{2n-1} k^6$, varvid vi ur det föregående får de efterfrågade olikheterna.	2
ELLER	
$\sum = \frac{1}{42}n(762n^6 - 1323n^5 + 651n^4 - 49n^2 + 1)$	2
Högra sidans olikhet kan skrivas $\frac{127}{7}n^7 - \sum = \frac{1}{42}n(1323n^5 - 651n^4 + 49n^2 - 1) \geqslant 0$	2
och den är giltig eftersom $1323n^5 \geqslant 651n^4$ ja $49n^2 \geqslant 1$ då $n \geqslant 1$.	2
Den västra sidans olikhet kan skrivas $\sum - \frac{127}{7}(n-1)^7 = \frac{1}{42}(4011n^6 - 15351n^5 + 26670n^4 - 26719n^3 + 16002n^2 - 5333n + 762) \geqslant 0$.	2
Prövat med värden $n = 1, 2, 3$.	2
Slutledning med värden $n > 3$.	2
ELLER	
Induktion, grundsteget $n = 1$: $0^7 \leqslant 1^6 \leqslant \frac{127}{7}1^7$.	2
Induktionsantagande: $\frac{127}{7}(n-1)^7 \leqslant \sum_{k=n}^{2n-1} k^6 \leqslant \frac{127}{7}n^7$ för något n.	1
Vi undersöker fallet $n+1$: $\frac{127}{7}n^7 \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n+1} k^6 \leqslant \frac{127}{7}(n+1)^7$.	2
Ur induktionsantagandet får vi $\frac{127}{7}(n-1)^7 + (2n)^6 + (2n+1)^6 - n^6 \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n+1} k^6 \leqslant \frac{127}{7}n^7 + (2n)^6 + (2n+1)^6 - n^6$.	2
Olikheten $\frac{127}{7}(n-1)^7 + (2n)^6 + (2n+1)^6 - n^6 \geqslant \frac{127}{7}n^7$ förenklas till formen $573n^5 - 395n^4 + 795n^3 - 321n^2 + 139n - \frac{120}{7} \geqslant 0$, som gäller, eftersom $n \geqslant 1$ implicerar att $573n^5 \geqslant 395n^4$, osv.	2
Olikheten $\frac{127}{7}n^7 + (2n)^6 + (2n+1)^6 - n^6 \leqslant \frac{127}{7}(n+1)^7$ förenklas till formen $189n^5 + 395n^4 + 475n^3 + 321n^2 + 115n + \frac{120}{7} \geqslant 0$, som är klar.	2
Därmed får vi påståendet för fallet $n+1$.	1
Olikheten löst med räknare.	0
En bra början: granskat något konkret fall korrekt genom en beräkning, exempelvis $n = 1$.	2

13.

Mängden $A_6 = \{15,16,17,18,19,20\}$,	1
$\odot$ Summa: 105.	1
Man kan ta reda på summan av elementen i mängden A_{2019} med hjälp av ett kalkylprogram eller med formeln nedan.	
$A_{2019} = \{2037171, \ldots, 2039189\}$	1
$\odot$ Summa: 4 115 085 420.	2
Vi härleder härnäst den allmänna formeln för summan av elementen i mängden A_k.	
Mängden A_k består av k element, dvs. i mängderna	1
$A_0, \ldots, A_{k-1}$ finns totalt $\sum_{i=1}^{k-1} i = \frac{1}{2}k(k-1)$ element, med början från noll.	2
Det första elementet i mängden A_k är alltså $\frac{1}{2}k(k-1)$.	1
Därmed är $\frac{1}{2}(k+1)k - 1$ det sista elementet i mängden A_k.	(1)
Mängden A_k består av k element, vilkas medelvärde är	
$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}k(k-1) + \frac{1}{2}(k+1)k - 1) = \frac{1}{4}(k^2 - k + k^2 + k - 2) = \frac{1}{2}(k^2 - 1)$.	1
Summan av elementen i mängden är därmed $\frac{1}{2}(k^2-1)k$.	1
Formeln $\frac{1}{2}(k^2-1)k$ har gissats utifrån empiriska observationer, summorna 105 och 4 115 085 420	1+1+2